

Exercice 9 : Intersections (ou pas, d'ailleurs) de droites

1) Dans un repère de l'espace, on considère les points $A(-3; 1; 4)$ et $B(2; -2; 1)$ et la droite d de

représentation paramétrique $\begin{cases} x = -6 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 8 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Montrer que les droites (AB) et d sont sécantes et préciser leur point d'intersection C

2) On considère les points $E(4; 0; 1)$ et $F(5; -1; 3)$ et la droite d de représentation paramétrique :

$d : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -4 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Montrer que les droites (EF) et d sont strictement parallèles.

3) Étudier les positions relatives des droites d_1 et d_2 , puis de d_1 et d_3 et enfin de d_2 et d_3 .

$$d_1: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$d_2: \begin{cases} x = -4 - 3t' \\ y = 9 - 2t' \\ z = -5 + t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

$$d_3: \begin{cases} x = -6\theta \\ y = 6\theta \\ z = -4\theta \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}$$

Exercice 10 : Intersections (ou pas, d'ailleurs) droite/plan

1) a) Soit d_1 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -7 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = -5 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{P}_1$ d'équation $-2x - 3y + z - 6 = 0$

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de d_1 et de $\mathcal{P}_1$

b) Soit d_2 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = -12 + 5t \\ z = 9 - 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{P}_2$ d'équation $4x + 2y + z - 1 = 0$

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de d_2 et de $\mathcal{P}_2$

2) On donne les points $A(-5; 4; -3)$ et $B(1; -1; 3)$ et le plan Π d'équation $x + y + 3z - 9 = 0$.

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) et de Π

3) Dans chaque cas, déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de d et de $\mathcal{P}$

a) $d : \begin{cases} x = -1 - 2\theta \\ y = 2 - \theta \\ z = -3 + 5\theta \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{P}$ d'équation $x + 5y + z + 6 = 0$

b) d la droite passant par $C(6; -1; -3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; -1)$ et $\mathcal{P}$ le plan de vecteur normal $\vec{n}(1; 1; 3)$ et passant par le point $D(4; 0; -1)$

Exercice 11 : Intersections (ou pas, d'ailleurs) de plans

- 1) a) On considère les plans $\mathcal{P}_1$ d'équation cartésienne $x + y + 2z - 3 = 0$ et $\mathcal{P}_2$ d'équation cartésienne $-2x + 4y + 5z + 6 = 0$
Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$
- b) On considère les plans Π_1 d'équation cartésienne $x - 2z - 1 = 0$ et Π_2 d'équation cartésienne $y - 2z + 4 = 0$
Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection des plans Π_1 et Π_2
- 2) a) On considère les plans $\mathcal{P}_1$ d'équation cartésienne $x - y - 2z - 1 = 0$ et $\mathcal{P}_2$ d'équation cartésienne $-2x + 2y + 4z + 4 = 0$
Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$
- b) On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $-x + y - z + 2 = 0$ et le plan $\mathcal{P}'$ dont une représentation paramétrique est : $\mathcal{P}' : \begin{cases} x = -1 - t + 4t' \\ y = t \\ z = 2 + 3t - 5t' \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}$
Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$

Exercice 12 : Coplanarité et droites

- 1) On donne : $d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $d_2 : \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
- a) Montrer que d_1 et d_2 ne sont pas coplanaires
- b) Déterminer par un point et un vecteur directeur une droite d_3 parallèle à d_1 et sécante à d_2
- c) Donner une représentation paramétrique de d_3
- 2) Soit un cube $ABCDEFGH$ et les points M, N et P les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[HG]$.
On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
- a) Donner les représentations paramétriques des droites (PM) et (EN)
- b) Les points E, M, N et P sont-ils coplanaires ?

- 3) *On considère les 3 droites d_1, d_2 et d_3 dont les représentations paramétriques sont :

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} ; \quad d_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_3 : \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- a) Montrer que ces 3 droites sont concourantes
- b) Sont-elles coplanaires ?

Exercice 13 : Le même en plus dur

On se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère un réel m et deux droites d et d' de représentations

paramétriques : $d : \begin{cases} x = 1 - mt \\ y = 1 + t \\ z = -3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $d' : \begin{cases} x = -2m^2 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$

Déterminer suivant les valeurs du paramètre m la position relative des droites d et d'

Exercice 14 : D'après Bac 1

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points

$A(0; -1; 5)$, $B(2; -1; 5)$, $C(11; 0; 1)$ et $D(11; 4; 4)$.

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.

Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.

À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C .

On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un réel positif.

On admet que M_t et N_t ont pour coordonnées $M_t(t; -1; 5)$ et $N_t\left(11; \frac{4}{5}t; 1 + \frac{3}{5}t\right)$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes

1) a) La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI) , (OJ) ou (OK) . Lequel ?

b) La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathcal{P}$ parallèle à l'un des plan (OIJ) , (OIK) ou (OJK) . Lequel ?

c) Vérifier que la droite (AB) coupe le plan $\mathcal{P}$ au point $E(11; -1; 5)$

d) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

2) a) Montrer que $M_t N_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$

b) A quel instant t la longueur $M_t N_t$ est-elle minimale ?