

Corrigé métropole 2 (dévoilé) – juin 2024

Corrigé Exercice 1

1. a. $\Rightarrow$

b. $p(R \cap F) = p(R) \times p_R(F) = 0,6 \times 0,47 = 0,282$

Il y a **28,2 %** de chance que le client soit régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.

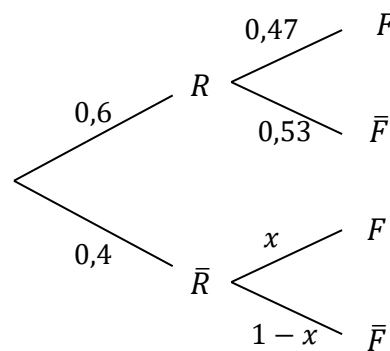
c. On sait que $p(F) = 0,38$.

Comme $p(F) = p(R \cap F) + p(\bar{R} \cap F) = 0,282 + 0,4 \times p_{\bar{R}}(F)$

On en déduit $0,282 + 0,4 \times p_{\bar{R}}(F) = 0,38 \Leftrightarrow p_{\bar{R}}(F) = \frac{0,38 - 0,282}{0,4} = 0,245$

Si le client n'est pas régulier, il y a **24,5%** qu'il ait acheté la carte de fidélité.

d. $p_F(R) = \frac{p(R \cap F)}{p(F)} = \frac{0,282}{0,38} \simeq 0,74$. Non, son affirmation n'est pas exacte, il n'y a qu'environ 74%



2. a. Il s'agit de la répétition de 20 expériences de Bernoulli, toutes identiques et indépendantes, de probabilité de succès de 0,38 : **X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,38$.**

b. $p(X \geq 5) = 1 - p(X \leq 4) \simeq 0,927$

Il y a environ **93 %** de chances d'avoir au moins 5 clients ayant acheté la carte parmi les 20

Partie B

1. $E(X_2) = np = 1000 \times 0,47 = 470$

C'est le nombre **moyen de clients ayant acheté une carte** de fidélité qu'on peut espérer dans un échantillon de 1 000 clients.

2. C'est le **montant moyen des bons d'achats** versés par client sur un échantillon de 1 000

On a $E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2) = 30\,000 + 50E(X_2) = 30\,000 + 50 \times 470 = 53\,500$

Et $E(Z) = \frac{1}{1000} E(Y) = \frac{53500}{1000} = 53,5$ **CQFD**

Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes, donc

$$V(Y) = V(Y_1) + V(Y_2) = 100\,000 + 50^2 V(X_2)$$

Avec $V(X_2) = np(1-p) = 1000 \times 0,47 \times 0,53 = 249,1$

On a $V(Y) = 100\,000 + 2\,500 \times 249,1 = 722\,750$

Alors $V(Z) = \frac{1}{1000^2} V(Y) = \frac{722750}{1000000} = 0,722\,75$ **CQFD**

3. L'évènement $(51,7 < Z < 55,3)$ correspond à l'évènement $(|Z - 53,5| < 1,8)$ c'est-à-dire l'évènement contraire de $(|Z - 53,5| \geq 1,8)$

On applique donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev $p(|Z - E(Z)| \geq \delta) \leq \frac{V(Z)}{\delta^2}$ pour $\delta = 1,8$

Soit : $p(|Z - 53,5| \geq 1,8) \leq \frac{0,72275}{1,8^2}$

On a alors $p(|Z - 53,5| < 1,8) \geq 1 - \frac{0,72275}{3,24} \Leftrightarrow p(|Z - 53,5| < 1,8) \geq 0,7769$

Par élargissement **$p(|Z - 53,5| < 1,8) \geq 0,75$**

La probabilité que le montant moyen soit strictement compris entre 51,7 € et 55,3 € est bien supérieure à 0,75.

Corrigé Exercice 2

Affirmation 1 : VRAIE

Le plan (ABC) a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Alors $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 6 + 2 \times (-3) + (-1) \times 6 = 12 - 6 - 6 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 12 - 12 - 0 = 0$
Donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) , il est bien normal à ce plan.

Affirmation 2 : VRAIE

La droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{u}$: elle est donc parallèle à la droite (AB) .

De plus $\begin{cases} x_A = 2 + 2t \\ y_A = 3 - t \\ z_A = 1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2 + 2t \\ 4 = 3 - t \\ -1 = 1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = -2 \\ t = 3 - 4 \\ 2t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$

Le système a une solution, donc cette droite passe par le point A : c'est bien la droite (AB)

Affirmation 3 : FAUSSE

Le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le plan donc l'équation est proposée a pour vecteur normal $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et comme $\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} = 1$ et $\frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}} = 0 - \frac{1}{2} \neq 1$ les vecteurs ne sont pas colinéaires.
Ce ne peut donc pas être l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$

Remarque : On peut aussi trouver une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ avec un terme identique (par exemple $2x$) et montrer que les autres termes sont différents.

Il a une équation cartésienne du type : $2x - y + 2z + d = 0$

Comme $C \in \mathcal{P}$, on a $2x_C - y_C + 2z_C + d = 0 \Leftrightarrow 12 + 2 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -12$

Donc son équation cartésienne est : $2x - y + 2z - 12 = 0$

Affirmation 4 : FAUX

Les droites D et D' ont comme vecteurs directeurs $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}' \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$: elles ne sont pas parallèles car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

On résout : $\begin{cases} 3 + t = 2t' \\ 1 + t = 4 - t' \\ 2 + t = -1 + 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + (3 - t') = 2t' \\ t = 3 - t' \\ 2 + (3 - t') = -1 + 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 3t' \\ t = 3 - t' \\ 6 = 3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{1}{2} \\ t = \frac{5}{2} \\ t' = \frac{1}{2} \end{cases}$

Le système a une solution, donc les 2 droites ont un point d'intersection : elles sont sécantes, et donc coplanaires

Corrigé Exercice 3

Partie A : 1. a. $u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 2u_n + 2 - 2 = u_n^2 - 2u_n = u_n(u_n - 2)$ CQFD

b. D'une part on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2$
D'autre part : $(u_n - 1)(u_n - 2) = u_n^2 - 2u_n - u_n + 2 = u_n^2 - 3u_n + 2$
On a bien : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$

2. a. On remarque que démontrer que $u_n < 2$ revient à démontrer que $u_n - 2 < 0$

Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ or dans cette question, on a $a < 2$
l'inégalité est vraie pour $n = 0$

Hérédité : On suppose que pour $p \in \mathbb{N}$, on a $u_p - 2 < 0$

Alors $u_{p+1} - 2 = u_p(u_p - 2)$

On a admis que $u_p > 1$ donc est $u_p > 0$ et, par hypothèse de récurrence, on a $u_p - 2 < 0$

Donc, par produit, on en conclut que $u_{p+1} - 2 < 0$

Conclusion : pour tout entier naturel n , on a bien $u_n - 2 < 0 \Leftrightarrow u_n < 2$

b. On a $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$

On sait que $u_n > 1 \Leftrightarrow u_n - 1 > 0$ et on vient de montrer que $u_n - 2 < 0$

Donc par produit, on en conclut que $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est décroissante.

Comme (u_n) est aussi minorée par 1 (admis) : donc d'après le théorème des suites monotones bornée, elle est convergente.

On pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ on a alors aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$

et par suite : $\ell^2 - 2\ell + 2 = \ell \Leftrightarrow \ell^2 - 3\ell + 2 = 0$

On a $\Delta = 9 - 8 = 1$ avec $\ell_1 = \frac{3+1}{2} = 2$ et $\ell_2 = \frac{3-1}{2} = 1$

Comme la suite est décroissante, elle est majorée par son 1^{er} terme $u_0 = a < 2$ donc la seule solution possible est $\ell_2 = 1$

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Partie B 1. u(2,1) pour $a = 2$ et $n = 1$ le programme renvoie $u_1 = 2$

u(2,1) pour $a = 2$ et $n = 2$ le programme renvoie $u_2 = 2$

2. Dans le cas où $a = 2$ la suite (u_n) a l'air d'être stationnaire et de termes tous égaux à 2

Partie C 1. a. On veut montrer que $v_{n+1} = 2v_n$

D'une part : $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1) = \ln(u_n^2 - 2u_n + 1)$

D'autre part : $2v_n = 2\ln(u_n - 1) = \ln((u_n - 1)^2) = \ln(u_n^2 - 2u_n + 1)$

On a bien : $v_{n+1} = 2v_n$: la suite (v_n) est bien géométrique de raison 2

Le premier terme est $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln(a - 1)$

b. On a alors $v_n = v_0 \times q^n = \ln(a - 1) \times 2^n$

et comme $v_n = \ln(u_n - 1)$ on a $e^{v_n} = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n = e^{v_n} + 1 = e^{\ln(a-1) \times 2^n} + 1$ CQFD

2. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$ Donc la limite de $\ln(a - 1) \times 2^n$ dépend du signe de $\ln(a - 1)$

On a $\ln(a - 1) \geq 0 \Leftrightarrow a - 1 \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 2$

1^{er} cas : si $1 < a < 2$ alors $\ln(a-1) < 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(a-1) \times 2^n = -\infty$

Comme on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ par composée, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(a-1) \times 2^n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

2^{ème} cas : si $a = 2$ alors on a admis que la suite était stationnaire et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

3^{ème} cas : si $a > 2$ alors $\ln(a-1) > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(a-1) \times 2^n = +\infty$

Comme on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$ par composée, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(a-1) \times 2^n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Corrigé Exercice 4

Partie A

1. a. $f(0) = 2$. b. $f'(0) = -1$.

2. Il semblerait que $S = \{-2\}$

3. Non, elle semble d'abord concave puis convexe. Le point N est un point d'inflexion, car la tangente y traverse la courbe.

4. Si F est la primitive de f , on a $F' = f$, en particulier, on en déduit le sens de variation de F :

La seule courbe qui correspond est la **courbe 2**

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$F' = f$		$-$	$+$
$F(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Partie B

1. On a $f(0) = 2$ mais $f(0) = (0+b)e^0 = b$ donc **$b = 2$**

2. On aussi $f(-2) = 0$ donc $(-2a+b)e^{-2\lambda} = 0$ comme l'exponentielle est toujours strictement positive, on doit bien avoir $-2a+b=0$ et donc $-2a+2=0 \Rightarrow a = \frac{-2}{-2} = 1$
e $-2a+b=0$ puis en déduire la valeur de a .

3. On a maintenant : $f(x) = (x+2)e^{\lambda x}$,
 $f'(0) = -1$ or $f'(x) = e^{\lambda x} + (x+2)\lambda e^{\lambda x} = (\lambda x + 2\lambda + 1)e^{\lambda x}$ donc $f'(0) = 2\lambda + 1$

Donc $2\lambda + 1 = -1 \Leftrightarrow \frac{\lambda(-2)}{2} = -1$

L'expression de f est donc $f(x) = (x+2)e^{-x}$,

Partie C

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$ donc, par composée de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 = -\infty$, donc, par produit de limites, **$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$**

2. Avec $f(-1) = e$

Et comme $f(x) = (x+2)e^{-x} = \frac{x}{e^x} + 2e^{-x}$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-x} = 0$

Et par limite comparée on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-x-1$		$+$	$-$
e^{-x}		$+$	$+$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e
		$\searrow$	0

3. a. $f''(x) = -e^{-x} + (-x - 1)(-e^{-x}) = xe^{-x}$

Donc pour $x \leq 0$, on a $f''(x) \leq 0 \Rightarrow$ La fonction est concave sur $] -\infty; 0]$

Et pour $x \geq 0$, on a $f''(x) \geq 0 \Rightarrow$ La fonction est convexe sur $[0; +\infty[$

b. Le point d'inflexion a pour abscisse $x = 0$ et pour ordonnées $f(0) = 2$: c'est le point $N(0 ; 2)$

4. a. $f(x) = (x + 2)e^{-x} = u'v$ avec $u' = e^{-x}$ et $v = x + 2$ d'où $u = -e^{-x}$ et $v' = 1$

On a alors :

$$\begin{aligned} I(t) &= [-e^{-x}(x + 2)]_{-2}^t - \int_{-2}^t -e^{-x} dx \\ &= -e^{-t}(t + 2) - \left(-e^{-(-2)}(-2 + 2) \right) + [-e^{-x}]_{-2}^t \\ &= e^{-t}(-t - 2) - 0 - e^{-t} - (-e^{-(-2)}) \\ &= e^{-t}(-t - 2 - 1) + e^2 \\ &= (-t - 3)e^{-t} + e^2 \end{aligned}$$

CQFD

b. On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-t - 3)e^{-t} + e^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{t}{e^t} \right) - \lim_{t \rightarrow +\infty} 3e^{-t} + e^2$

Or, par limite comparée, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{t}{e^t} \right) = 0$ et aussi $\lim_{t \rightarrow +\infty} 3e^{-t} = 0$

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = e^2$

Or $I(t)$ représente l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = -2$ et $x = t$

En faisant tendre t vers $+\infty$, on a bien une surface illimitée dont l'aire est finie et égale à e^2