

Sujet d'entraînement (sans QCM)

Exercice 1

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 5% des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.

Un ingénieur amis au point un test à appliquer aux pièces. Ce test a deux résultats possibles : « positif » ou bien « négatif ».

On applique ce test à une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne.

On note $p(E)$ la probabilité d'un évènement E .

On considère les évènements suivants :

- D : « la pièce est défectueuse »;
- T : « la pièce présente un test positif »;
- $\bar{D}$ et $\bar{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de D et T .

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- La probabilité qu'une pièce présente un test positif sachant qu'elle est défectueuse est égale à 0,98;
- la probabilité qu'une pièce présente un test négatif sachant qu'elle n'est pas défectueuse est égale à 0,97.

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE I

1. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. a. Déterminer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne soit défectueuse et présente un test positif.

b. Démontrer que : $p(T) = 0,0775$.

3. On appelle **valeur prédictive positive** du test la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant que le test est positif. On considère que pour être efficace, un test doit avoir une valeur prédictive positive supérieure à 0,95.

Calculer la valeur prédictive positive de ce test et préciser s'il est efficace.

PARTIE II

On choisit un échantillon de 20 pièces dans la production de la chaîne, en assimilant ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.

On rappelle que : $p(D) = 0,05$.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.

2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

3. Calculer la probabilité que cet échantillon contienne exactement 5 pièces défectueuses.

On donnera un résultat arrondi au millième.

4. Combien de pièces de production doit-on choisir dans l'échantillon pour que la probabilité d'avoir plus de 5 pièces défectueuses soit supérieure à 1% ? Expliquer votre démarche.

Exercice 2

Les 3 parties peuvent se traiter de façon indépendante

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés.

Elle sort les gâteaux du congélateur à $-19\text{ }^{\circ}\text{C}$ et les apporte sur la terrasse où la température est de $25\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Au bout de 10 minutes la température des gâteaux est de $1,3\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Partie I – Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante c'est-à-dire que l'augmentation de la température est la même minute après minute.

Selon ce modèle, déterminer quelle serait la température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur.

Ce modèle semble-t-il pertinent ?

Partie II – Second modèle

On note T_n la température des gâteaux en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur ; ainsi $T_0 = -19$.

On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante :

Pour tout entier naturel n , $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$.

1. Justifier que, pour tout entier n , on a $T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$
2. Calculer T_1 et T_2 . On donnera des valeurs arrondies au dixième.
3. Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de $10\text{ }^{\circ}\text{C}$. Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.
4. On pose pour tout entier naturel n , $U_n = T_n - 25$.
 - a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme U_0 .
 - b. En déduire que pour tout entier naturel n , $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$.
5. Quelle sera, à terme, la température atteinte par les gâteaux? Détailler la démarche.

Partie III – Troisième modèle

Un troisième modèle donne pour l'évolution de la température la relation suivante :

Pour tout entier naturel n , $\theta_{n+1} = \theta_n - 0,1n + 2,45$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $\theta_n = -0,05n^2 + 2,5n - 19$.
2. Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante. Selon ce dernier modèle, quelle serait alors la température des gâteaux ?

Exercice 3

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur égale à 1.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

On considère le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$

1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H .

2. a. Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

b. On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$

Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Démontrer que les coordonnées de M sont $(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$

4. a. Justifier que le vecteur $\vec{n}(-1; 1; 1)$ est normal au plan (EGD) .

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x + y + z - 1 = 0$.

c. Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M .
Donner une représentation paramétrique de cette droite

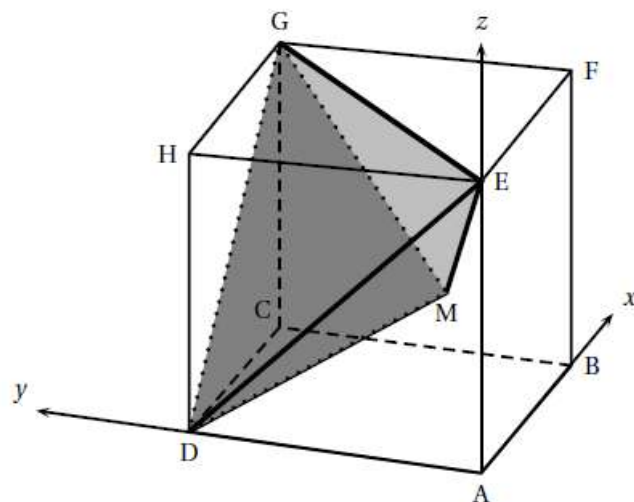
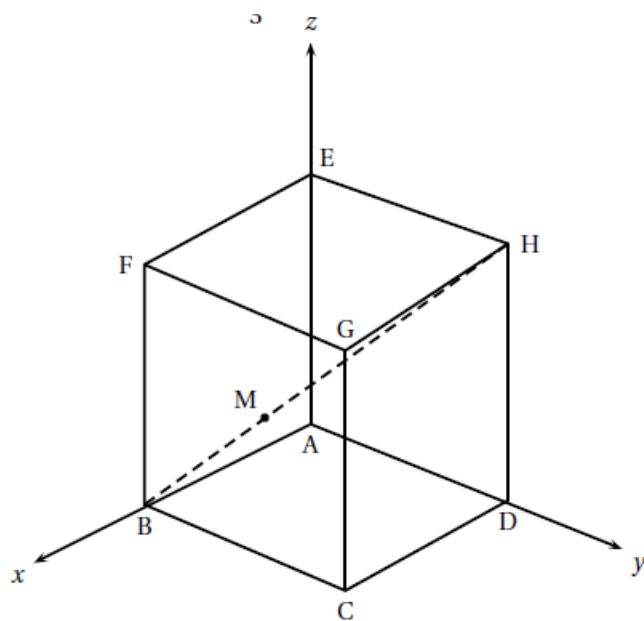
5. Le cube $ABCDEFGH$ est représenté ci-contre selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide $GEDM$, en gris sur la figure :

Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide $GEDM$.

a. Soit K , le pied de la hauteur de la pyramide $GEDM$ issue du point M .

Démontrer que les coordonnées du point K sont $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$

b. En déduire le volume de la pyramide $GEDM$.



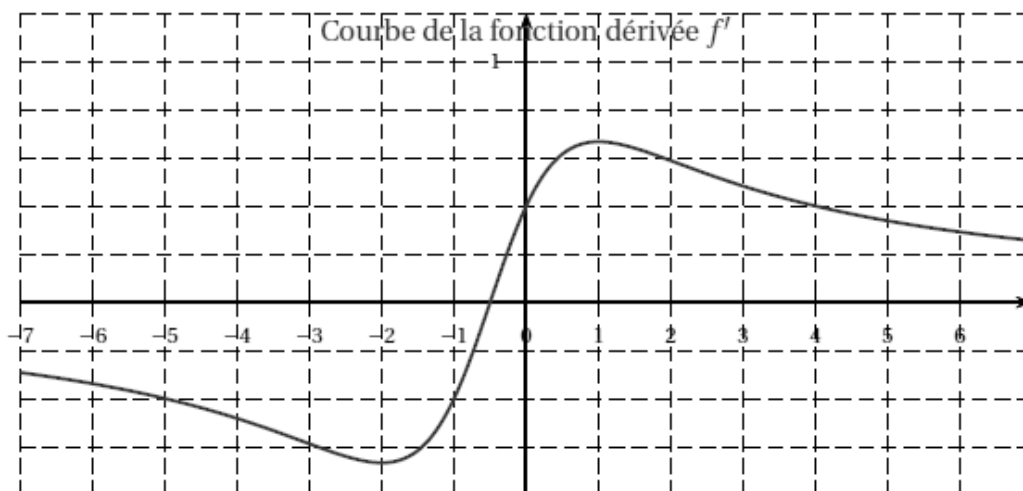
On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'une pyramide est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{b \times h}{3}$ où b désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée.

Exercice 4

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f' .



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.
2. a. Donner les variations de la fonction dérivée f' .
b. En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $[-10; 10]$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$$

1. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in [-10; 10]$.
2. En déduire le tableau des variations de f .
3. a. Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; 10\right]$
b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

4. f' est dérivable sur $[-10; 10]$ et on admet que, pour tout $x \in [-10; 10]$, $f''(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$

Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f sur $[-10; 10]$.