

Formulaire et Théorèmes



de

Géométrie

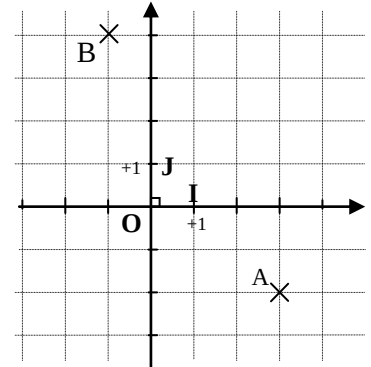
Dans un repère orthonormé

Longueur d'un segment

➤ A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) on a $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

Application

A (3 ; -2) et B (-1 ; 4) On a : $AB^2 = (-1 - 3)^2 + (4 - (-2))^2$
 $AB^2 = (-4)^2 + (4 + 2)^2$
 $AB^2 = 16 + 36$
 $AB^2 = 52$
 $AB = \sqrt{52}$



Coordonnées du milieu d'un segment

➤ A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) et M (x_M ; y_M) milieu de [AB]

$$\text{On a } x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Application

A (3 ; -2) et B (-1 ; 4) On a $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$
et M milieu de [AB] $x_M = \frac{3 + (-1)}{2}$ et $y_M = \frac{(-2) + 4}{2}$
 $x_M = \frac{2}{2} = 1$ et $y_M = \frac{2}{2} = 1$ M (1 ; 1)

Coordonnées d'un vecteur

➤ A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) on a $\overrightarrow{AB} (x_B - x_A ; y_B - y_A)$

Application

A (3 ; -2) et B (-1 ; 4) On a : $\overrightarrow{AB} = (-1 - 3 ; 4 - (-2))$
 $\overrightarrow{AB} = (-4 ; 6)$

Égalité de vecteurs

➤ $\vec{u} (x_u ; y_u)$ et $\vec{v} (x_v ; y_v)$ Si $\vec{u} = \vec{v}$, alors $\begin{cases} x_u = x_v \\ y_u = y_v \end{cases}$

Application

A (3 ; -2) ; B (-1 ; 4) ; C (2 ; -5) et D (x ; y) on a $\overrightarrow{AB} (-4 ; 6)$ et $\overrightarrow{CD} (x - 2 ; y + 5)$
si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $\begin{cases} x - 2 = -4 \\ y + 5 = 6 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = -4 + 2 = -2 \\ y = 6 - 5 = 1 \end{cases}$ et D (-2 ; 1)

Nature d'un triangle

Triangle rectangle

- Un triangle est rectangle s'il a un angle droit (ou deux côtés perpendiculaires)

Triangle isocèle

- Un triangle est isocèle s'il a deux côtés égaux
- Un triangle est isocèle s'il a deux angles égaux

Triangle équilatéral

- Un triangle est équilatéral s'il a trois côtés égaux
- Un triangle est isocèle s'il a trois angles égaux (60°)

Nature d'un quadrilatère

Parallélogramme

- Un quadrilatère est un parallélogramme s'il a ses côtés opposés parallèles 2 à 2
- Un quadrilatère est un parallélogramme s'il a ses côtés de même longueur 2 à 2
- Un quadrilatère est un parallélogramme s'il a ses angles opposés de même mesure 2 à 2
- Un quadrilatère est un parallélogramme s'il a ses diagonales qui se coupent en leur milieu
- Si $\overline{AB} = \overline{DC}$ alors ABCD est un parallélogramme

Rectangles

- Un rectangle est un parallélogramme qui a ses diagonales de la même longueur
- Un rectangle est un parallélogramme qui a un angle droit

Carrés

- Un carré est un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires et de la même longueur

Losanges

- Un losange est un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires
- Un losange est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de la même longueur
- Un carré est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs perpendiculaires et de la même longueur

Droites remarquables des triangles

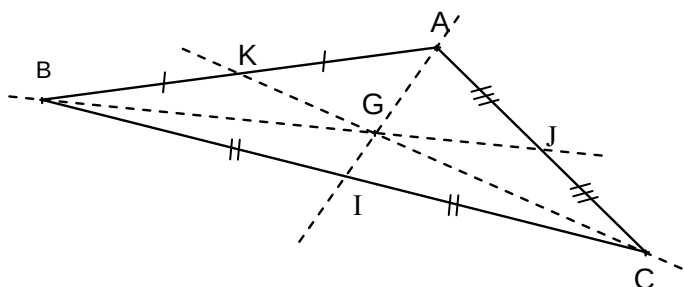
➤ Définition de la médiane

La médiane issue d'un sommet est la droite passant par ce sommet et par le milieu du côté opposé

Application

Comme $[AM]$ est la médiane issue de A dans le triangle ABC , alors M est le milieu de $[BC]$.

- Les trois médianes d'un triangle sont concourantes : le point de concours s'appelle le centre de gravité



➤ Propriété du centre de gravité

Si G est le centre de gravité du triangle ABC , et I , J et K les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, on a :

$$AG = \frac{2}{3} \times AI \quad ; \quad BG = \frac{2}{3} \times BJ \quad \text{et} \quad CG = \frac{2}{3} \times CK$$

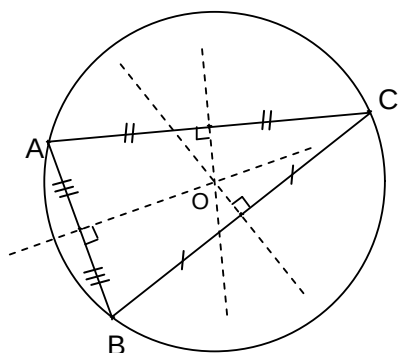
➤ Définition de la médiatrice

La médiatrice d'un segment est la droite qui passe en son milieu et qui lui est perpendiculaire

Application

Comme $[OM]$ est la médiatrice de $[BC]$, alors M est le milieu de $[BC]$.

- Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes : le point de concours s'appelle le centre du cercle circonscrit.



➤ Cercle circonscrit

Le cercle circonscrit à un triangle, c'est le cercle qui passe par les 3 sommets du triangle.

En particulier, on a :

$$OA = OB = OC \quad (\text{rayons du cercle})$$

Remarque

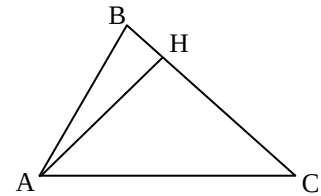
Les triangles isocèles ont leur médiatrice, médiane, hauteur et bissectrice issues du sommet principal confondues. C'est vrai pour tous les sommets des triangles équilatéraux/

➤ Définition de la hauteur

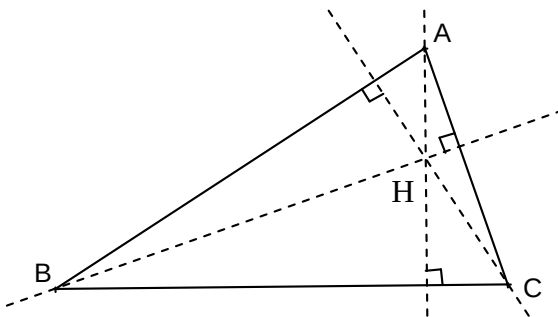
La hauteur issue d'un sommet est la droite passant par son sommet et perpendiculaire à son côté opposé

Application

Comme $[AH]$ est la hauteur issue de A dans le triangle ABC, alors les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.



➤ Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes : le point de concours s'appelle l'orthocentre



Exemples d'application

Si on sait que (BH) et (CH) sont 2 hauteurs du triangle ABC. Alors H est l'orthocentre du triangle ABC.

Comme les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes, la droite (AH) est forcément la hauteur issue de A.

On a donc $(AH) \perp (BC)$

Autour des angles

Si on a un triangle quelconque

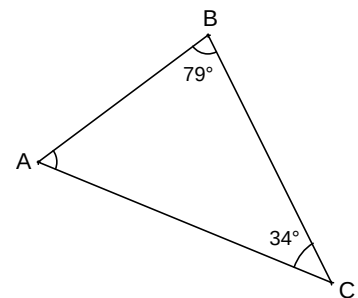
➤ La somme des angles d'un triangle fait 180°

Application

On a $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

Or $\hat{B} + \hat{C} = 34^\circ + 79^\circ = 113^\circ$

Donc $\hat{A} = 180 - 113 = 67^\circ$



Si on a un triangle rectangle

➤ Trigonométrie

$$\cos(\widehat{\text{angle}}) = \frac{\text{côté adjacent à l'angle}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin(\widehat{\text{angle}}) = \frac{\text{côté opposé à l'angle}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan(\widehat{\text{angle}}) = \frac{\text{côté opposé à l'angle}}{\text{côté adjacent à l'angle}}$$

Théorème de Pythagore, réciproque et contraposée

Théorème direct de Pythagore

Si un triangle est rectangle, alors le carré de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés

Application

Comme le triangle ABC est rectangle en B, je peux appliquer le théorème direct de Pythagore.
L'hypoténuse est [AC]

On a donc : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

Reste à résoudre l'équation pour calculer la longueur d'un des 3 côtés.

Si on cherche AC

$$AC^2 = 5^2 + 6^2$$

$$AC^2 = 25 + 36$$

$$AC^2 = 61$$

$$AC = \sqrt{61}$$

Si on cherche AB

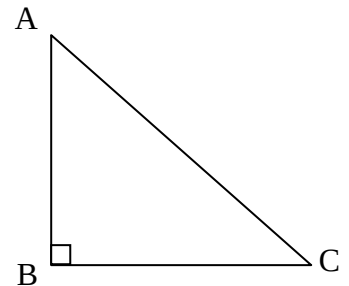
$$7^2 = AB^2 + 3^2$$

$$49 = AB^2 + 9$$

$$AB^2 = 49 - 9$$

$$AB^2 = 40$$

$$AB = \sqrt{40}$$



Réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle

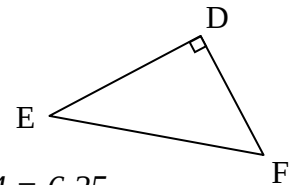
Application

[EF] est le plus grand côté du triangle DEF

D'une part $EF^2 = 2,5^2 = 6,25$

D'autre part $ED^2 + DF^2 = 1,5^2 + 2^2$

$$= 2,25 + 4 = 6,25$$



Comme on a $EF^2 = ED^2 + DF^2$, je peux appliquer la réciproque du théorème de Pythagore.
Le triangle EFD est rectangle en D

Contraposée du théorème de Pythagore

Si dans un triangle, le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle n'est pas rectangle

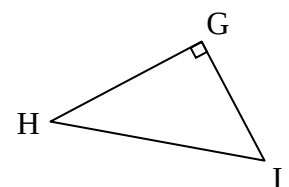
Application

[HI] est le plus grand côté

D'une part $HI^2 = 8^2 = 64$

D'autre part $HG^2 + GI^2 = 3,5^2 + 7,2^2$

$$= 12,25 + 51,84 = 64,09$$



Comme on a $EF^2 \neq ED^2 + DF^2$, je peux appliquer la contraposée du théorème de Pythagore.
Le triangle EFD n'est pas rectangle

Formulaire périmètres et aires

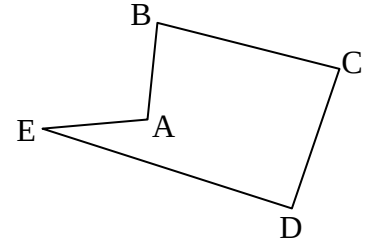
Périmètre

- Le périmètre d'une figure, c'est la longueur de « son tour ».

Application

Le périmètre $\mathcal{P}$ de la figure ci-contre est :

$$\mathcal{P} = AB + BC + CD + DE + EA$$



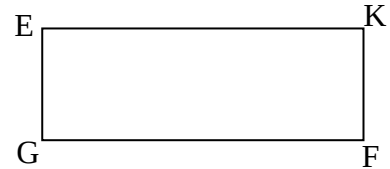
Aire d'un rectangle

- L'aire d'un rectangle s'obtient en multipliant sa longueur par sa largeur

Application

L'aire $\mathcal{A}$ du rectangle EKFG ci-contre est :

$$\mathcal{A} = EK \times EG \text{ (ou } GF \times KF)$$

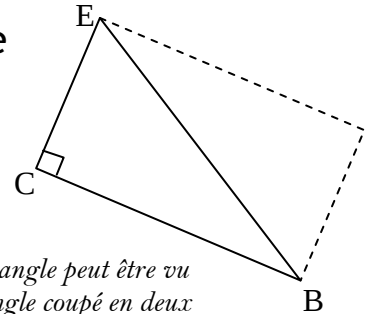


Aire d'un triangle rectangle

- Pour calculer l'aire d'un triangle rectangle, on multiplie les deux côtés de l'angle droit, et on divise par deux

Application

L'aire $\mathcal{A}$ du triangle rectangle EBC ci-contre est $\mathcal{A} = \frac{EC \times CB}{2}$



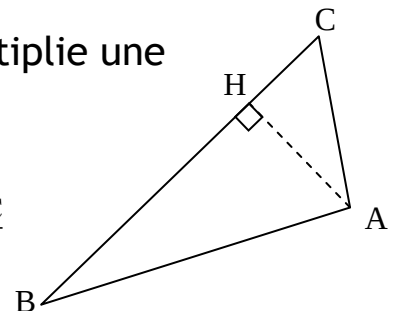
Un triangle rectangle peut être vu comme un rectangle coupé en deux

Aire d'un triangle quelconque

- Pour calculer l'aire d'un triangle quelconque, on multiplie une hauteur par sa base, et on divise par deux

Application

Le triangle ABC ci-contre a une hauteur AH. Son aire $\mathcal{A}$ est : $\mathcal{A} = \frac{AH \times BC}{2}$



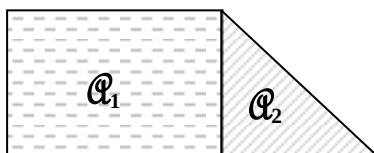
Aire d'un polygone

- Pour calculer l'aire d'un polygone, on décompose la figure en triangles et rectangles, dont on additionne ou on soustrait les aires.

Application

L'aire du polygone est

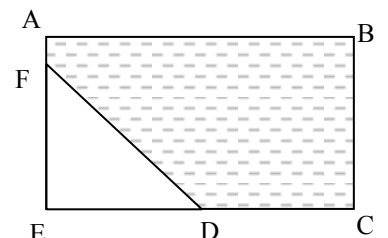
$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$$



L'aire du polygone est

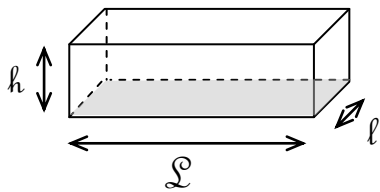
$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{(ABCE)} - \mathcal{A}_{(EFD)}$$

$$\mathcal{A} = (AB \times BC) - \left(\frac{EF \times ED}{2} \right)$$



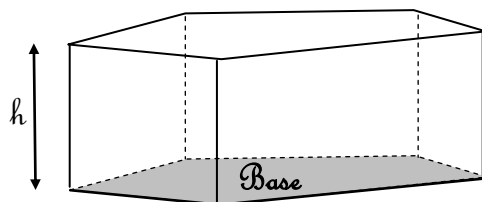
Formulaire des volumes

Parallélépipède rectangle (pavé droit)



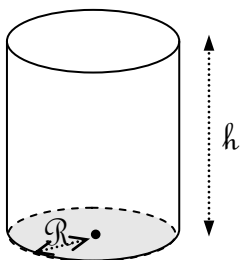
$$V = L \times l \times h$$

Prisme droit



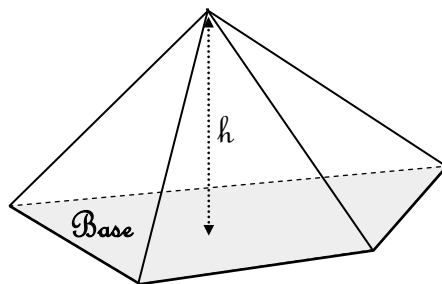
$$V = Aire_{(base)} \times h$$

Cylindre



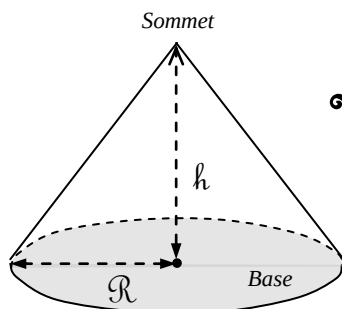
$$V = \pi \times R^2 \times h$$

Pyramide



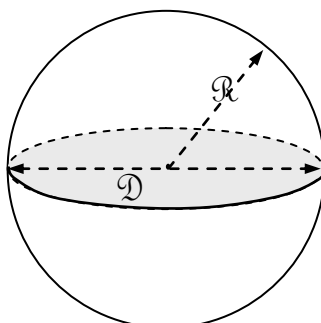
$$V = \frac{Aire_{(base)} \times h}{3}$$

Cône



$$V = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3}$$

Sphère



$$V = \frac{4 \times \pi \times R^3}{3}$$