

Corrections entraînement bac 1

Corrigés Exercice n° 1

1. $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 2 = 2$ et $u_2 = 2 + 2 + 2 = 6$

2. L'algorithme correspond à une recherche de dépassement de seuil : la première valeur de n pour laquelle $u_n > 200$ est $n = 14$

En effet, on a $u_{13} = 182$ et $u_{14} = 210$

3. a. La suite (u_n) a l'air d'être **croissante**.

b. On aurait $u_0 = a \times 0^2 + b \times 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

et $u_1 = a \times 1^2 + b \times 1 = 2 \Rightarrow a + b = 2$ et $u_2 = a \times 2^2 + b \times 2 = 6 \Rightarrow 4a + 2b = 6$

et donc $\begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$

En soustrayant, on obtient $a = 1$. Et, par suite $b = 2 - a = 1 \Rightarrow$ On aurait donc $u_n = n^2 + n$

4. a. $v_n = u_n + 2n + 2 - u_n = 2n + 2$

$\Rightarrow$ Il s'agit d'une **suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 2$**

b. ► **1^{ère} méthode** : avec la formule de la somme des premiers termes d'une suite arithmétique :

S_n est la somme des $(n + 1)$ premiers termes d'une suite arithmétique.

Donc $S_n = (n + 1) \times \frac{2 + (2n + 2)}{2} = (n + 1) \times \frac{2n + 4}{2} = (n + 1)(n + 2)$ **CQFD**

► **2^{ème} méthode** : par récurrence :

Initialisation : D'une part $S_0 = v_0 = 2$ et d'autre part $(0 + 1)(0 + 2) = 1 \times 2 = 2$
donc la propriété est vraie au rang 0

Hypothèse de récurrence : on suppose qu'il existe un entier naturel p tel que $S_p = (p + 1)(p + 2)$

Hérédité : pour $n = p + 1$

D'une part $S_{p+1} = S_p + v_{p+1} = S_p + 2(p + 1) + 2 = S_p + 2(p + 2)$

et d'après l'hypothèse de récurrence :

$$S_{p+1} = (p + 1)(p + 2) + 2(p + 2) = p^2 + 2p + p + 2 + 2p + 4 = p^2 + 5p + 6$$

$$\text{D'autre part : } (n + 1)(n + 2) = (p + 2)(p + 3) = p^2 + 3p + 2p + 6 = p^2 + 5p + 6$$

La propriété est vraie au rang $p + 1$, elle est donc héréditaire

Conclusion : pour tout entier naturel n , on a $S_n = (n + 1)(n + 2)$

c. $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_{n+1} - u_n)$
 $= -u_0 + u_1 - u_1 + u_2 - \dots - u_n + u_{n+1}$
 $= u_{n+1} - u_0$

On a alors : $u_{n+1} - u_0 = (n + 1)(n + 2) \Leftrightarrow u_{n+1} = u_0 + (n + 1)(n + 2) = (n + 1)(n + 2)$

Et donc $u_n = n(n + 1)$ on retrouve bien la conjecture de la question 3.b

Corrigé Exercice n°2

Partie 1

1. On a :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Il semble donc que la fonction f soit croissante sur $] -\infty; -1]$ et décroissante sur $[-1; +\infty[$

2. On a :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	concave		convexe

Il semble donc que la fonction f soit concave sur $] -\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$

Partie 2

1. a. $f'(x) = 1e^{-x} + (x + 2)(-e^{-x}) = (1 - x - 2)e^{-x} = (-x - 1)e^{-x}$ CQFD

b.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-x - 1$	$+$	0	$-$
e^{-x}	$+$	$ $	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

c. f est **continue** et **strictement croissante** sur $[-2; -1]$ et on a $f(-2) = 0 < 2$ et $f(-1) = 2e > 2$
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[-2; -1]$.

à la calculatrice, on trouve $\alpha \simeq -1,6$

2. a. $f''(x) = -e^{-x} + (-x - 1)(-e^{-x}) = (-1 + x + 1)e^{-x} = xe^{-x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
e^{-x}	$+$		$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	concave		convexe

La fonction f est concave sur $] -\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$

b. Le point $A(0; 2)$ est le **point d'inflexion** de la courbe $\mathcal{C}$, puisque la courbe y change de convexité.

Corrigé Exercice n°3

1. a. $\Rightarrow$

b. $p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$

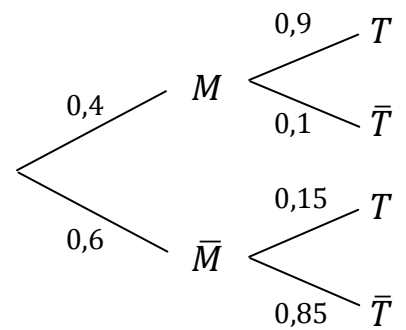
Il y a **36% de chances** que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.

c. $p(T) = p(M \cap T) + p(M \cap \bar{T}) = 0,36 + 0,6 \times 0,15 = 0,45$

La probabilité que le test du chat soit positif est **bien égale à 0,45**.

d. $p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{0,36}{0,45} = 0,8$

La probabilité que le chat soit porteur de la maladie **est de 80 %**



2. a. Il s'agit de la répétition de 20 épreuves de Bernoulli indépendantes (le choix des 20 chats), de probabilité de succès de 0,45 (le test est positif).

La variable X suit donc une **loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,45$**

b. $p(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,45^5 \times 0,55^{15} = 15\,504 \times 0,45^5 \times 0,55^{15} \simeq 0,036$

Il y a **environ 3,6 % de chances** qu'il y ait exactement 5 chats présentant un test positif.

c. $p(X \leq 8) \simeq 0,414$

Il y a **environ 41,4 % de chances** qu'il y ait au plus 8 chats présentant un test positif.

d. $E(X) = np = 20 \times 0,45 = 9$

On peut espérer en **moyenne** avoir **9 chats présentant un test positif** dans 1 échantillon de 20 chats

3. Quel nombre n de chat faut-il prendre dans l'échantillon pour que la probabilité p_n dépasse les 99 % ?

On a $p_n = p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1)$ et on veut que $p_n \geq 0,99$

À la calculatrice, on trouve $n = 12$: **à partir d'un échantillon de 12 chats**, il y aura 99% de chance qu'il y ait plus de 2 chats présentant un test positif