

1. Corrigé

$$1. u_1 = \frac{4u_0}{1+3u_0} = \frac{4 \times \frac{1}{2}}{1+3 \times \frac{1}{2}} = 2 \div \frac{5}{2} = \frac{4}{5}$$

2. a.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{4}{5}$ on a bien $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$: la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un entier p pour lequel la propriété est vraie,

$$\text{donc on a : } \frac{1}{2} \leq u_p \leq u_{p+1} \leq 2$$

Comme la fonction f est admise croissante, on obtient : $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_p) \leq f(u_{p+1}) \leq f(2)$

$$\text{avec } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} \text{ et } f(2) = \frac{8}{7} \quad \text{cela donne} \quad \frac{5}{4} \leq u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq \frac{8}{7}$$

$$\text{et comme } \frac{1}{2} \leq \frac{4}{5} \text{ et } \frac{8}{7} \leq 2 \text{ on a par élargissement : } \frac{5}{4} \leq u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq \frac{8}{7}$$

La propriété est vraie pour $n = p + 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a bien $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

b. On a montré que $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est **croissante**, mais aussi que $u_n \leq 2$ donc la suite (u_n) est **majorée**. D'après le théorème des suites monotones bornées, la suite (u_n) est bien **convergente**.

$$c. \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} \text{ donc par passage à la limite } u_{n+1} = f(u_n) \Rightarrow \ell = f(\ell)$$

$$\Leftrightarrow \ell = \frac{4\ell}{1+3\ell} \Leftrightarrow \ell + 3\ell^2 = 4\ell \Leftrightarrow 3\ell^2 - 3\ell = 0 \Leftrightarrow 3\ell(\ell - 1) = 0 \Rightarrow \text{soit } \ell = 0 \text{ soit } \ell = 1$$

La solution $\ell = 0$ est impossible, car on sait que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 2$.

On a donc **$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$**

3. a. $\Rightarrow$

b. Le programme renvoie la valeur **$n = 7$** pour $E = 10^{-4}$.

On a $u_6 \simeq 0,99976$ donc $1 - u_6 \simeq 2,4 \times 10^{-4}$

et $u_7 \simeq 0,99994$ donc $1 - u_7 \simeq 0,6 \times 10^{-4}$

$$4. a. v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\frac{4u_n}{1+3u_n}}{1-\frac{4u_n}{1+3u_n}} = \frac{4u_n}{1+3u_n} \div \left(\frac{1+3u_n-4u_n}{1+3u_n}\right) = \frac{4u_n}{1+3u_n} \div \frac{1-u_n}{1+3u_n}$$

$$= \frac{4u_n}{1+3u_n} \times \frac{1+3u_n}{1-u_n} = \frac{4u_n}{1-u_n} = 4v_n \quad \text{La suite } (v_n) \text{ est bien géométrique de raison 4.}$$

$$\text{On a } v_0 = \frac{u_0}{1-u_0} = \frac{1}{2} \div \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 \text{ donc } v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 4^n = 4^n$$

$$b. v_n = \frac{u_n}{1-u_n} \Leftrightarrow v_n(1-u_n) = u_n \Leftrightarrow v_n - v_n u_n - u_n = 0 \Leftrightarrow u_n(-1-v_n) = -v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{-v_n}{-1-v_n}$$

$$\text{On a bien : } u_n = \frac{v_n}{v_n+1}$$

$$c. u_n = \frac{4^n}{4^n+1} = \frac{4^n}{4^n\left(1+\frac{1}{4^n}\right)} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{1}{1+0,25^n} \quad \text{CQFD}$$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} 0,25^n = 0$ car $0,25 \in]-1; 1[$ donc, par quotient de limites, **$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{1+0} = 1$**

def seuil (E) :

$u = 0,5$

$n = 0$

while **$1 - u < E$** :

$$u = \frac{4u}{1+3u}$$

$$n = n + 1$$

Return n

2. Corrigé

1. $u_1 = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} \times 1 + 1 = \frac{7}{4}$ et $u_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{21+4+16}{16} = \frac{41}{16}$

2. a. B3 : « $= 3 * B2/4 + A2/4 + 1$ »

b. La suite (u_n) a l'air d'être **croissante**.

3. a. **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et on a bien $0 \leq u_0 \leq 1$: la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un entier p pour lequel la propriété est vraie,

donc on a : $p \leq u_p < p + 1$

Alors $\frac{3}{4}p \leq \frac{3}{4}u_p \leq \frac{3}{4}(p + 1)$

En ajoutant $\frac{1}{4}p + 1$, on obtient : $\frac{3}{4}p + \frac{1}{4}p + 1 \leq \frac{3}{4}u_p + \frac{1}{4}p + 1 \leq \frac{3}{4}(p + 1) + \frac{1}{4}p + 1$

$\Leftrightarrow p + 1 \leq u_{p+1} \leq p + \frac{7}{4}$

Et, par élargissement, comme $\frac{7}{4} \leq 2$, on obtient bien : $p + 1 \leq u_{p+1} \leq p + 2$

La propriété est vraie pour $n = p + 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a bien $n \leq u_n < n + 1$.

b. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - u_n = \frac{1}{4}n + 1 - \frac{1}{4}u_n$

Or, comme on a montré que $u_n \geq n$, on a $\frac{1}{4}n + 1 - \frac{1}{4}u_n \geq \frac{1}{4}n + 1 - \frac{1}{4}n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geq 1 > 0$

La suite (u_n) est bien croissante

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ et que $u_n \geq n$, d'après le théorème des croissances comparées, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

c. Comme $n \leq u_n < n + 1$ on obtient $1 \leq \frac{u_n}{n} < 1 + \frac{1}{n}$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on a bien : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = 1$

4. a. On a : $v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \frac{3}{4}u_n - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}(u_n - n) = \frac{3}{4}v_n$

La suite (v_n) est bien géométrique de raison $\frac{3}{4}$

b. Alors $v_n = v_0 \times q^n$ avec $v_0 = u_0 - 0 = 1$ donc $v_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Et on a bien $u_n = v_n + n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$

3. Corrigé

Partie A :

1. $a_1 = 0,85 \times 200 + 450 = 620$

2. S'il reste, d'un mois sur l'autre, 85% des collaborateurs en télétravail, cela fait $0,85a_n$; et en ajoutant chaque mois 450 nouvelles personnes en télétravail, on obtient bien $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$

3. a. $v_{n+1} = a_{n+1} - 3000 = 0,85a_n + 450 - 3000 = 0,85(v_n + 3000) - 2550 = 0,85a_n + 2550 - 2550$
On a $a_{n+1} = 0,85a_n$ et la suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison 0,85.

b. $v_n = v_0 \times q^n$ avec $v_0 = a_0 - 3000 = -2800$ donc $v_n = -2800 \times 0,85^n$

c. $a_n = v_n + 3000 = -2800 \times 0,85^n + 3000$ **CQFD**

4. $a_n > 2500 \Leftrightarrow -2800 \times 0,85^n + 3000 > 2500 \Leftrightarrow 0,85^n < \frac{-500}{-2800} \Leftrightarrow 0,85^n < \frac{5}{28}$

En passant au logarithme, on a alors : $n \times \ln(0,85) < \ln\left(\frac{5}{28}\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln 0,85}$ or $\frac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln 0,85} \simeq 10,6$

On doit donc avoir $n \geq 11$

C'est au bout de 11 mois que le nombre de télétravailleurs dépassera les 2 500 personnes.

Partie B :

1. $f'(x) = \frac{5(x+2)-(5x+4)}{(x+2)^2} = \frac{5x+10-5x-4}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2} > 0$

La dérivée f' est strictement positive sur $[0 ; +\infty[$, donc la fonction f y est **strictement croissante**

2. a. **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{5 \times 1 + 4}{1 + 2} = \frac{9}{3} = 3$ donc on a bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$.

La propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un entier p pour lequel la propriété est vraie,

donc on a : $0 \leq u_p \leq u_{p+1} \leq 4$.

Comme la fonction f est croissante, on obtient $f(0) \leq f(u_p) \leq f(u_{p+1}) \leq f(4)$

avec $f(0) = \frac{4}{2} = 2$ et $f(4) = \frac{24}{6} = 4$ cela donne $2 \leq u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq 4$

et comme par élargissement : $0 \leq u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq 4$

La propriété est vraie pour $n = p + 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a bien $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

b. De l'encadrement $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$, on déduit que la suite (u_n) est croissante et bornée par 4.
D'après le théorème des suites monotones bornées, **la suite (u_n) est bien convergente.**

3. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{2} \in]-1; 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

D'après le théorème des gendarmes, on en conclut donc que $\lim_{n \rightarrow \infty} 4 - u_n = 0$ et donc que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 4$

Au bout de nombreux mois, le nombre de télétravailleurs satisfaits se stabiliserait autour de 4000.

4. Corrigé

1. a. $u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$ et $v_1 = 2u_0 + v_0 = 2 + 1 = 3$

b. On a $v_{n+1} - v_n = 2u_n + v_n - v_n = 2u_n$ Or, on a admis que $u_n > 0$, donc $v_{n+1} - v_n > 0$

La suite (v_n) est strictement croissante

On a alors $v_n \geq v_0$ et donc $v_n \geq 1$.

c. Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et on a bien $u_0 \geq 0 + 1$: la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un entier p pour lequel la propriété est vraie,

donc on a : $u_p \geq p + 1$

Comme on a montré que $v_p \geq 1$, alors $u_p + v_p \geq (p + 1) + 1$.

C'est-à-dire $u_{p+1} \geq (p + 1) + 1$ La propriété est vraie pour $n = p + 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a bien $u_n \geq n + 1$.

d. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} n + 1 = +\infty$ et que $u_n \geq n + 1$, d'après le théorème des croissances comparées, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$$

2. a. On a toujours, pour tout entier n : $-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1$,

donc, comme $u_n^2 > 0$, on obtient bien $-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}$

b. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ donc par produit de limites, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^2 = +\infty$ et par inverse de limite, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n^2} = 0$

Comme on a $-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}$, d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^2 = 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 2 + 0 = 2$

Donc, par composé de limites, (r_n) converge bien vers $\sqrt{2}$.

d. D'une part : $r_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n}$

Et d'autre part : $\frac{2 + r_n}{1 + r_n} = \frac{2 + \frac{v_n}{u_n}}{1 + \frac{v_n}{u_n}} = \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n} \div \frac{u_n + v_n}{u_n} = \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n} \times \frac{u_n}{u_n + v_n} = \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n}$

On a bien : $r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}$

5. Corrigé

1. Il semble que $\frac{4}{u_n} = 4 + n$

2. **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ donc on a bien $u_0 > 0$: la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un entier p pour lequel la propriété est vraie,

donc on a : $u_p > 0 \Rightarrow 4u_p > 0$ mais aussi $u_p + 4 > 4 > 0$

donc, comme quotient de deux nombre strictement positifs, on a $\frac{4u_p}{u_p+4} > 0$, c'est-à-dire $u_{p+1} > 0$

La propriété est vraie pour $n = p + 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a bien $u_n > 0$

3. 1^{ère} méthode : démonstration directe

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_n + 4} - u_n = \frac{4u_n - u_n(u_n + 4)}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2}{u_n + 4}$$

Or, comme $u_n > 0$, on a $u_n + 4 > 4 > 0$ et donc $u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$

La suite (u_n) est bien décroissante.

2^{ème} méthode : par récurrence

Soit la fonction de récurrence $f(x) = \frac{4x}{x+4}$ définie sur $]0; +\infty[$ (puisque'on sait que $u_n > 0$)

On a $f'(x) = \frac{4(x+4)-4x}{(x+4)^2} = \frac{16}{(x+4)^2} > 0$ donc f est croissante sur $]0; +\infty[$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{4}{5}$ on a bien $u_0 \geq u_1$: la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un entier p pour lequel la propriété est vraie, donc on a : $u_p \geq u_{p+1}$

La fonction de récurrence f est croissante, on a donc : $f(u_p) \geq f(u_{p+1})$

cela donne $u_{p+1} \geq u_{p+2}$ la propriété est vraie pour $n = p + 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a bien $u_n \geq u_{n+1}$ et la suite (u_n) est bien décroissante

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par zéro, donc, d'après le théorème des suites monotones bornées, elle est **convergente vers une limite ℓ**

$$5. v_{n+1} = \frac{4}{u_{n+1}} = 4 \div \frac{4u_n}{u_n+4} = \frac{4(u_n+4)}{4u_n} = \frac{u_n+4}{u_n} = 1 + \frac{4}{u_n} = 1 + v_n$$

La suite (v_n) est bien arithmétique de raison 1 et de 1^{er} terme $v_0 = \frac{4}{u_0} = \frac{4}{1} = 4$

Donc $v_n = v_0 + nR = 4 + n$

$$6. \text{ On a donc } v_n = \frac{4}{u_n} = 4 + n \Leftrightarrow u_n = \frac{4}{4+n}$$

on a $\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + n = +\infty$ donc par quotient de limites : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{4+n} = 0$

6. Corrigé

1. $u_1 = \frac{3u_0+2v_0}{5} = \frac{3 \times 16 + 2 \times 5}{5} = \frac{58}{5}$ et $v_1 = \frac{u_0+v_0}{2} = \frac{21}{2}$

2. a. $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3u_n+2v_n}{5} - \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{6u_n+4v_n-5u_n-5v_n}{10} = \frac{(u_n-v_n)}{10} = \frac{1}{10}w_n$

La suite (w_n) est bien géométrique de raison $\frac{1}{10} = 0,1$ et de premier terme $w_0 = u_0 - v_0 = 11$

On a alors $w_n = w_0 \times q^n = 11 \times 0,1^n$

b. La suite (w_n) est une suite de termes positifs

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0,1^n = 0 \text{ car } 0,1 \in]-1; 1[\text{ donc par multiple de limites : } \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$$

3. a. $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+2v_n}{5} - u_n = \frac{3u_n+2v_n-5u_n}{5} = \frac{-2u_n+2v_n}{5} = -\frac{2}{5}(u_n - v_n) = -0,4w_n$ CQFD

b. Comme on sait que $w_n > 0$, on a alors $-0,4w_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$
La suite (u_n) est bien **décroissante**.

c. **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 16$ donc on a bien $u_0 \geq 5$: la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un entier p pour lequel la propriété est vraie,

donc on a : $u_p \geq 5$ et $3u_p \geq 15$

Par ailleurs on a admis que $v_p \geq 5$ donc $2v_p \geq 10$

On a alors $\frac{3u_p+2v_p}{5} \geq \frac{15+10}{5}$ c'est-à-dire $u_{p+1} \geq 5$ La propriété est vraie pour $n = p + 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a bien $u_n \geq 5$

La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 5, donc, d'après le théorème des suites monotones bornées, elle est **convergente**

4. a. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3u_n+2v_n}{5} = \frac{3\ell+2\ell'}{5} = \ell$

$$\Leftrightarrow \frac{3\ell+2\ell'}{5} = \ell \Leftrightarrow 3\ell+2\ell' = 5\ell \Leftrightarrow 2\ell' = 2\ell \Leftrightarrow \ell' = \ell$$

b. $c_{n+1} = 5u_{n+1} + 4v_{n+1} = 5 \times \frac{3u_n+2v_n}{5} + 4 \times \frac{u_n+v_n}{2} = 3u_n + 2v_n + 2u_n + 2v_n = 5u_n + 4v_n = c_n$

La suite (c_n) est bien **constante**

On a alors $c_n = c_0 = 5u_0 + 4v_0 = 5 \times 16 + 4 \times 5 = 100$

c. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 100$ mais aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + 4 \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \Leftrightarrow 5\ell + 4\ell' = 100$

et comme $\ell' = \ell$ on a $9\ell = 100 \Leftrightarrow \ell = \frac{100}{9}$