

Corrigé Sujet n°3 – Centres étranger 1 – juin 25

Partie A

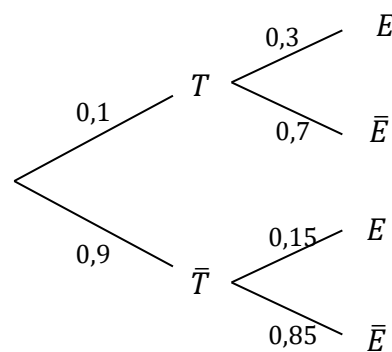
1. $P(\bar{T} \cap E) = p(\bar{T}) \times p_{\bar{T}}(E) = 0,9 \times 0,15 = \mathbf{0,135}$

2. $P(E) = P(T \cap E) + P(\bar{T} \cap E) = 0,1 \times 0,3 + 0,135 = \mathbf{0,165}$

Il y a **16,5 %** de chances qu'une erreur soit détectée lors d'un contrôle.

3. $p_E(T) = \frac{P(T \cap E)}{p(E)} = \frac{0,03}{0,165} \simeq \mathbf{0,18}$

Si une erreur a été détectée, il y a alors environ **18 %** de chances que le contrôle ait été total



Partie B

1. Il y a 15 contrôles, donc $n = 15$ et chacun a une probabilité $p = 0,165$ de détecter une erreur
 $X \hookrightarrow \mathcal{B}(15; 0,165)$

2. $p(X = 5) = \binom{15}{5} \times 0,165^5 \times (1 - 0,165)^{15-5} = 3003 \times 0,165^5 \times 0,835^{10} \simeq \mathbf{0,06}$

Il y a environ **6 %** de chances qu'exactly 5 erreurs soient détectées

3. $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 1 \times 0,165^0 \times 0,835^{15-0} = 1 - 0,835^{15} \simeq \mathbf{0,93}$

Il y a environ **93 %** de chances qu'au moins une erreur soit détectée

4. Soit n le nombre de contrôles effectués. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; 0,165)$

On cherche n tel que $p(X \geq 1) \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - 0,835^n \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,835^n \leq 0,01$

En passant au logarithme $\Leftrightarrow n \ln 0,835 \leq \ln 0,01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,835}$ car $\ln 0,835 < 0$

Avec $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,835} \simeq 25,54$ et comme n est un entier, c'est pour $n \geq \mathbf{26}$

Il faut faire au moins **26 contrôles** pour que la probabilité d'avoir au moins une erreur soit supérieure à **99 %**

Partie C

1. $E(X_1) = np = 20 \times 0,165 = \mathbf{3,3}$ et $V(X_1) = np(1 - p) = 3,3 \times 0,835 = \mathbf{2,755}$.

2. a. $E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3E(X_1) = 3 \times 3,3 = \mathbf{9,9}$

et comme les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes entre elles :

$V(S) = V(X_1 + X_2 + X_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3V(X_1) = 3 \times 2,755 = \mathbf{8,2665}$ CQFD

b. Pour cette question, on utilisera 10 comme valeur de $E(S)$.

On a $10 - 6 = 4$ et $14 - 10 = 4 \Rightarrow$ l'évènement $(6 < S < 14)$ correspond à $(|S - 10| < 4)$

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev $P(|S - E(S)| \geq \delta) \leq \frac{V(S)}{\delta^2}$ pour $\delta = 4$

C'est-à-dire $P(|S - 10| \geq 4) \leq \frac{8,2665}{16} \Leftrightarrow 1 - p(|S - 10| < 4) \leq \frac{8,2665}{16} \Leftrightarrow p(|S - 10| < 4) \geq 1 - \frac{8,2665}{16}$

Avec $1 - \frac{8,2665}{16} \simeq 0,48$ on a bien $p(|S - 10| < 4) \geq 0,48$

La probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est bien supérieure à **0,48**.