

Corrigé métropole 1 – Sept. 2025

Corrigé Exercice 1

Partie A

1. $u(t) = te^{-0,4t}$ alors $u'(t) = e^{-0,4t} + t(-0,4e^{-0,4t}) = (1 - 0,4t)e^{-0,4t}$
Donc $y' + 0,4y = (1 - 0,4t)e^{-0,4t} + 0,4 \times te^{-0,4t} = (1 - 0,4t + 0,4t)e^{-0,4t} = e^{-0,4t}$
L'égalité est vérifiée, la fonction u est bien solution de (E).

2. a. Comme $g(t) = f(t) - u(t)$ On a $f(t) = g(t) + u(t)$

$$\begin{aligned} \text{On calcule } y' + 0,4y &= f'(t) + 0,4f(t) = g'(t) + u'(t) + 0,4(g(t) + u(t)) \\ &= (g'(t) + 0,4g(t)) + (u'(t) + 0,4u(t)) \end{aligned}$$

Si g est solution de l'équation différentielle (H) alors $g' + 0,4g = 0$

Et comme u est solution de l'équation différentielle (E) alors $u' + 0,4u = e^{-0,4t}$

$$\text{On a alors } f' + 0,4f = 0 + e^{-0,4t}$$

f est bien solution de l'équation différentielle (E)

$$\text{b. } y' + 0,4y = 0 \Leftrightarrow y' = -0,4y$$

$\Rightarrow$ Les fonctions solution de (E) sont de la forme $g(t) = ke^{-0,4t}$ avec $k \in \mathbb{R}$

c. Donc les solutions de (E) sont de la forme :

$$f(t) = g(t) + u(t) = ke^{-0,4t} + te^{-0,4t} = (k + t)e^{-0,4t} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

d. On cherche k tel que $f(0) = 1 \Leftrightarrow (k + 0)e^0 = 1 \Leftrightarrow k = 1$ soit $f(t) = (1 + t)e^{-0,4t}$.

Partie B

1. a. $f'(t) = 1e^{-0,4t} + (t + 1)(-0,4e^{-0,4t}) = (1 - 0,4t - 0,4)e^{-0,4t} = (-0,4t + 0,6)e^{-0,4t}$
CQFD

b. Avec $f(0) = 1$; $f(6) = 7e^{-2,4} \simeq 0,64$ et $f(1,5) = 2,5e^{-0,6} \simeq 1,37$

t	0	1,5	6
$-0,4t + 0,6$	+	0	-
$e^{-0,4t}$	+		+
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	1	$\nearrow 2,5e^{-0,6}$	$\searrow 7e^{-2,4}$

2. a. Sur $[0; 1,5]$ la fonction f est continue et strictement croissante, mais supérieure à 1 : l'équation $f(t) = 0,7$ n'y a pas de solution.

Sur $[1,5; 6]$ la fonction f est continue et strictement décroissante, avec $0,7 \in [f(6); f(1,5)]$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 0,7$ y admet une unique solution α .

En conclusion, sur l'intervalle $[0; 6]$, l'équation $f(t) = 0,7$ admet bien une unique solution α .

b. On a $5,615 < \alpha < 5,616 \Rightarrow \alpha \simeq 5,62$ et $5,62 \times 60 \simeq 337$ c
La personne sera en hypoglycémie environ 5h et 37 min après le repas.

3. a. On a : $\int_0^6 f(t) dt = \int_0^6 (t+1)e^{-0,4t} dt$

On pose $u = t+1$ et $v' = e^{-0,4t}$ On a alors $u' = 1$ et $v = -\frac{e^{-0,4t}}{0,4} = -2,5e^{-0,4t}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^6 f(t) dt &= [uv]_0^6 - \int_0^6 u'v = [(t+1)(-2,5e^{-0,4t})]_0^6 - \int_0^6 1 \times (-2,5e^{-0,4t}) dt \\ &= (-2,5 \times 7e^{-2,4}) - (-2,5 \times 1e^0) - [-2,5(-2,5e^{-0,4t})]_0^6 \\ &= -17,5e^{-2,4} + 2,5 - (6,25e^{-2,4} - 6,25e^0) \\ &= -17,5e^{-2,4} + 2,5 - 6,25e^{-2,4} + 6,25 = -23,75e^{-2,4} + 8,75 \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

b. La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0; 6]$ est donnée par :

$$G_m = \frac{1}{6-0} \int_0^6 f(t) dt = \frac{1}{6} (-23,75e^{-2,4} + 8,75) \simeq 1,099$$

La glycémie moyenne lors des six heures suivant le repas est donc d'environ 1,10 g.L⁻¹.

c. f est solution de (E), donc $f' + 0,4f = e^{-0,4t} = v'$ donc $0,4f = v' - f' \Rightarrow f = \frac{1}{0,4}(v' - f')$.

Ainsi une primitive de f est « tout simplement » $\frac{1}{0,4}(v - f)$.

$$\text{Donc } \int_0^6 f(t) dt = \left[\frac{1}{0,4}(v - f) \right]_0^6 = \frac{1}{0,4}(v(6) - f(6)) - \frac{1}{0,4}(v(0) - f(0)).$$

On retrouve alors le résultat $G_m \simeq 1,099$.

Corrigé Exercice 2

Partie A

1. On a $(FG) \perp (ABF)$ or (FM) est incluse dans (ABF) donc $(FM) \perp (FG)$.

2. $(AB) \parallel (HG)$ donc $(AM) \parallel (HG)$ donc A, M, G et H sont coplanaires.

Partie B

1. On a : $\overrightarrow{GM} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On constate que $x_{\overrightarrow{AH}} = 0x_{\overrightarrow{GM}}$ alors que $y_{\overrightarrow{AH}} \neq 0y_{\overrightarrow{GM}}$ donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

2. a. $\overrightarrow{GM}$ est un vecteur directeur de (GM) et (GM) passe par $G(1; 1; 1)$ donc on a bien :

$$(GM) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

b. On résout : $\begin{cases} 1 + t = 0 \\ 1 - t = k \\ 1 - t = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases}$

Le système est compatible donc il y a un point d'intersection $N \begin{cases} x = 0 \\ y = k = 2 \\ z = k = 2 \end{cases} \Rightarrow N(0; 2; 2) \quad \text{CQFD.}$

3. a. On a $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AN} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ainsi $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 2 \times 0 + 0 \times 2 + 0 \times 2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{AN}$.

Donc (AM) et (AN) sont orthogonales et sécantes en A donc elles sont perpendiculaires.

b. On a donc $\mathcal{A}_{AMN} = \frac{1}{2} AM \times AN$. Or $AM = 2$ et $AN = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Donc $\mathcal{A}_{AMN} = 2\sqrt{2}$.

4. a. J est le milieu de $[BG]$ donc $x_J = \frac{x_B + x_G}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$. De même $y_J = \frac{1}{2}$ et $z_J = \frac{1}{2} \Rightarrow J \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

b. On calcule $\overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ puis $\overrightarrow{FJ} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ et $\overrightarrow{FJ} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$. Ainsi $\overrightarrow{FJ} \perp \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{FJ} \perp \overrightarrow{AN}$.

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ n'étant pas colinéaire, $\overrightarrow{FJ}$ est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (AMN) donc c'est un vecteur normal à (AMN) .

c. Une équation de (AMN) est donc de la forme $0x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + d = 0$.

Or $A \in (AMN) \Rightarrow 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0$. Donc une équation de (AMN) est $\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0$

Ce qui revient à, en multipliant tout par 2 pour simplifier : $(AMN): y - z = 0$.

On constate alors que $y_J - z_J = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow J \in (AMN)$.

On a $(FJ) \perp (AMN)$ et $J \in (AMN)$ donc J est le projeté orthogonal de F sur (AMN) .

5. $\mathcal{V}_{AMNF} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{AMN} \times FJ$. Or $FJ = \sqrt{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ainsi $\mathcal{V}_{AMNF} = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$.

La pyramide $BCGFM$, on considère pour base le carré $BCGF$ de côté 1 et donc d'aire égale à $1 \times 1 = 1$. La hauteur correspondante est alors la distance entre M et le plan (BCG) , or cette distance est $MB = 1$.

Ainsi $\mathcal{V}_{BCGFM} = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}$. On a donc effectivement $\mathcal{V}_{AMNF} = 2\mathcal{V}_{BCGFM}$ CQFD.

Corrigé Exercice 3

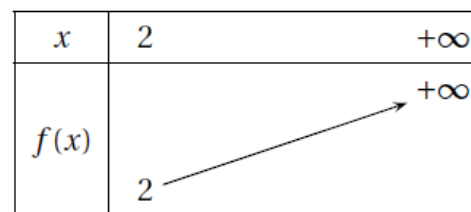
Partie A

1. On calcule : $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$

f' est positive, donc f est bien croissante.

D'autre part $f(2) = \sqrt{6-2} = 2$.

Et lorsque $x \rightarrow +\infty$, $3x-2 \rightarrow +\infty$ donc $f(x) \rightarrow +\infty$.



2. a. Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_n = u_0 = 6$ et $u_{n+1} = u_1 = f(6) = \sqrt{18-2} = 4$
Donc la propriété $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$ est vraie lorsque $n = 0$.

Hérédité : Si la propriété est vraie pour $n = p$ alors on a : $2 \leq u_{p+1} \leq u_p \leq 6$.

Alors pour $n = p + 1$, on a : $u_{n+1} = f(u_n) = f(u_{p+1}) = u_{p+2}$ et $u_n = u_{p+1} = f(u_p)$.

Or f étant croissante, on a alors $f(2) \leq f(u_{p+1}) \leq f(u_p) \leq f(6)$

$\Rightarrow 2 \leq u_{p+2} \leq u_{p+1} \leq 4 \leq 6 \Rightarrow 2 \leq u_{p+2} \leq u_{p+1} \leq 6$ (par élargissement)
alors la propriété est vraie pour $n = p + 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$.

b. (u_n) est donc décroissante et minorée par 2, donc d'après le théorème des suites monotones bornées, elle converge.

3. On résout $f(x) = x$ pour $x \geq 2$.

On obtient : $\sqrt{3x-2} = x \Leftrightarrow 3x-2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 2$

On a donc nécessairement $\ell = 2$.

4. a. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ donc il existe un rang N à partir duquel tous les termes u_n appartiennent à l'intervalle $[1,999999; 2,000001]$

b. pour $a > 2$

Partie B

1. $v_1 = 3 - \frac{2}{v_0} = 3 - \frac{2}{6} = \frac{8}{3}$

2. a. On a :

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1} - 1}{v_{n+1} - 2} = \frac{3 - \frac{2}{v_n} - 1}{3 - \frac{2}{v_n} - 2} = \frac{2 - \frac{2}{v_n}}{1 - \frac{2}{v_n}} = \frac{2v_n - 2}{v_n - 2} = \frac{2(v_n - 1)}{v_n - 2} = 2w_n$$

La suite (w_n) est bien **géométrique de raison 2**. On a comme 1^{er} terme : $w_0 = \frac{v_0 - 1}{v_0 - 2} = \frac{5}{4}$

b. On a alors $w_n = w_0 \times q^n = \frac{5}{4} \times 2^n = 1,25 \times 2^n$

$$w_n - 1 = \frac{1}{v_n - 2} \Leftrightarrow v_n - 2 = \frac{1}{w_n - 1} \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{w_n - 1} + 2 \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1} + 2$$

CQFD

c. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,25 \times 2^n - 1 = +\infty$

et par inverse $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1} = 0$ Donc à la fin, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n + 2 = 0 + 2 = 2$

$$3. 0 < \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1} + 2 < 2,01 \Leftrightarrow \frac{1}{0 < 1,25 \times 2^n - 1} < 0,01 \Leftrightarrow 1,25 \times 2^n - 1 > \frac{1}{0,01}$$

$$\Leftrightarrow 1,25 \times 2^n > 100 + 1 \Leftrightarrow 2^n > \frac{101}{1,25} \Leftrightarrow \ln(2^n) > \ln 80,8 \Leftrightarrow n \ln 2 > \ln 80,8$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln 80,8}{\ln 2} \text{ avec } \frac{\ln 80,8}{\ln 2} \simeq 6,3 \text{ et } n \text{ entier} \Rightarrow n \geq 7$$

Partie C

Pour u_n la suite est décroissante et converge vers 2, alors on trouve $u_{16} \simeq 2,012$ et $u_{17} \simeq 2,009$
Donc u_n appartient à l'intervalle $]1,99; 2,01[$ pour $n \geq 17$

Et on vient de montrer que v_n appartient à l'intervalle $]2; 2,01[$ pour $n \geq 7$

Pour que la condition soit vraie pour les deux suites, il faut que $n \geq 17$

Corrigé Exercice 4

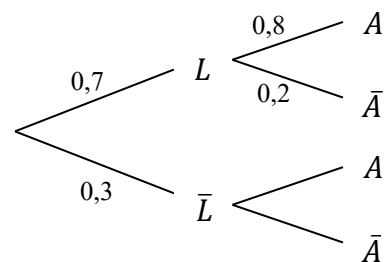
Affirmation 1

Soit A : « la personne choisit l'audioguide » et L : « la personne a acheté son billet en ligne »

On nous donne : $p_L(A) = 0,8$, $p(L) = 0,7$ et $p(\bar{A}) = 0,32$

On cherche $p_{\bar{L}}(\bar{A}) = \frac{p(\bar{L} \cap \bar{A})}{p(\bar{L})}$.

On a $p(A \cap L) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$. On obtient donc :



	A	$\bar{A}$	Total
L	0,56	0,14	0,7
$\bar{L}$	0,12	0,18	0,3
Total	0,68	0,32	1

On a donc $p_{\bar{L}}(\bar{A}) = \frac{p(\bar{L} \cap \bar{A})}{p(\bar{L})} = \frac{0,18}{0,3} = \frac{18}{30} < \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

L'affirmation 1 est FAUSSE

Affirmation 2

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de visiteurs optant pour l'audioguide.

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = p(A) = 0,68$.

On donc $p(X = 6) = \binom{12}{6} 0,68^6 \times 0,32^6 = 924 \times (0,68 \times 0,32)^6 = 924 \times 0,2176^6$

L'affirmation 2 est VRAIE

Affirmation 3

$E(X) = 0,1 \times 50 + 0,6 \times 80 + 0,3 \times 100 = 83$

L'affirmation 3 est FAUSSE

Affirmation 4

1^{er} chiffre : 9 choix (sans le zéro) – 2^{ème} chiffre : 9 choix (avec le zéro, mais sans le 1^{er} chiffre)

3^{ème} chiffre : 8 choix restants et 4^{ème} chiffre : 7 choix restants

Soit $N = 9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536 \neq 5\,040$

L'affirmation 3 est FAUSSE