

Exercice 6 : Amérique du Nord juin 2025

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ par $f(x) = e^x \sin(x)$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

Partie A

1. a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; \pi]$, $f'(x) = e^x [\sin(x) + \cos(x)]$.

b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

2. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

b. Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

c. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $e^x \sin(x) \geq x$.

3. Justifier que le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

Partie B

On note $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :

$$I = 1 + J \quad \text{et} \quad I = e^{\frac{\pi}{2}} - J$$

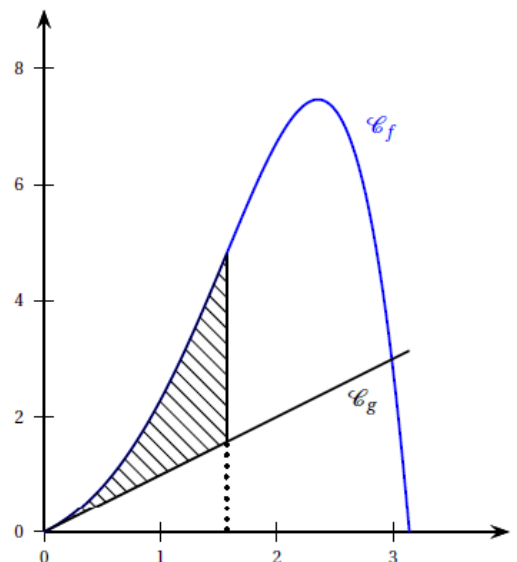
2. En déduire que : $I = \frac{(1 + e^{\frac{\pi}{2}})}{2}$

3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.

Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-contre sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$

et $x = \frac{\pi}{2}$



Exercice 7 : Centres étrangers juin 2024

On considère l'équation différentielle $(E_0) : y' = y$
où y est une fonction dérivable de la variable réelle x .

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.

2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0)

On considère l'équation différentielle $(E): y' = y - \cos(x) - 3 \sin(x)$
où y est une fonction dérivable de la variable réelle x .

3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2 \cos(x) + \sin(x)$.

On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E) .

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».

5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) .

6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.

7. Calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2e^x + \sin(x) + 2 \cos(x)) dx$.

Exercice 8 : Extraits Vrai/Faux juin 2025

1. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{n}{2 + \cos(n)}$$

Affirmation 1 : La suite (v_n) diverge vers $+\infty$.

2. Soit x donné dans $[0; 1[$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = (x - 1)e^n + \cos(n)$$

Affirmation 2 : La suite (u_n) diverge vers $-\infty$.