

Savoirs FL 4 : Théorèmes de comparaison

Exercice 16 : Quel théorème à partir de quelle inégalité ?

Soit f une fonction telle que $f(x)$ vérifie l'inégalité ou l'encadrement donné.

Préciser dans chaque cas les limites que l'on peut déterminer parmi les deux proposées (et le théorème)

- a. Pour tout réel $x \neq 0$, on a $\frac{1}{x} \leq f(x) \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) ? \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) ?$
- b. Pour tout réel $x \neq 0$, on a $f(x) \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) ? \text{ ou } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) ?$
- c. Pour tout réel $x > 1$, on a $\frac{1}{x} + x \leq f(x) \leq x + 1 \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) ? \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ?$
- d. Pour tout réel $x > 0$, on a $-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) ? \text{ et/ou } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ?$
- e. Pour tout réel $x \in]0; 1[$, on a $|f(x) - 1| \leq x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) ? \text{ et/ou } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) ?$

Exercice 17 : Théorème de comparaison, théorème des gendarmes

- 1) Soit $f(x) = x + \sin x$
 - a. Justifier que, pour tout réel x , on a $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$
 - b. Interpréter graphiquement ce résultat.
 - c. En déduire les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ en justifiant.
- 2) Soit $g(x) = e^{-x} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ définie sur $[0; +\infty[$.
 - a. Justifier que, pour tout $x \geq 0$, on a $-e^{-x} \leq g(x) \leq e^{-x}$. Illustrer graphiquement le résultat.
 - b. En déduire la limite de g en $+\infty$
- 3) Soit h une fonction définie sur $]0; +\infty[$ et telle que : $\ln x - 1 \leq h(x) \leq \ln x + 1$
Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ en justifiant.
- 4) Soit i une fonction définie sur $]0; +\infty[$ et telle que, pour tout réel $x > 0$, on ait $0 \leq i(x) \leq \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$
Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction i
- 5) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} + 1$
- 6) Soit g une fonction telle que, pour $x < 0$, on ait $g(x) \geq \frac{x^2}{6}$.
Peut-on conclure sur les limites éventuelles en $-\infty$ et en $+\infty$ de g ?