

Savoir Pb.2 : Variables aléatoires

Entraînement n° 1

1) On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire V dans le tableau ci-contre :

v_i	2	5	7	10	15
$p(V = v_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$

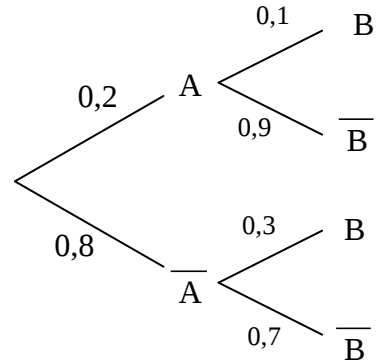
- Calculer $p(V > 7)$
- Déterminer l'espérance de cette variable aléatoire V
- Déterminer une valeur approchée de la variance et de l'écart-type de la variable V

2) On donne l'arbre de probabilités de deux événements A et B ci-contre.

Cet arbre correspond à un jeu tel que :

- Un joueur gagne 6 € lorsque l'événement B se réalise. Il perd 6 € sinon.
- Le joueur gagne 10 € en plus si l'événement A se réalise et perd 2 € en moins sinon.

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain obtenu lorsqu'on joue à ce jeu.



- Donner la loi de probabilité de X sous forme de tableau.
- Calculer l'espérance de X .
- Chaque membre d'une équipe de 15 joueurs joue 40 fois de suite à ce jeu. Combien l'équipe peut-elle espérer gagner ?

Entraînement n° 2

1) Une variable aléatoire X prend les valeurs $\{1; 2; 3; 4; 5\}$. Sa loi de probabilité est donnée par la formule :

$$p(X = x_k) = \frac{x_k}{15}$$

- Déterminer l'espérance E de cette variable aléatoire X
- Déterminer les valeurs exactes de la variance V et de l'écart-type σ de X
- Déterminer une valeur approchée au dixième de l'intervalle $[E - \sigma; E + \sigma]$

2) Un laboratoire se fournit en réactifs auprès de deux fournisseurs A et B . Certains réactifs utilisent une technique additionnelle de colorimétrie, d'autres non.

- Le fournisseur A vend son réactif de base 3 € et le fournisseur B le vend 2,40 €
- Les tests utilisant la colorimétrie coûtent chacun 1 € supplémentaire

On prélève un réactif au hasard. On définit les événements suivants :

A : « le réactif provient du fournisseur A »

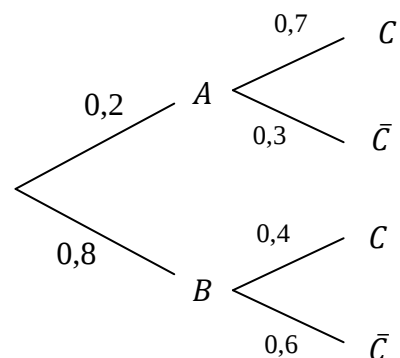
B : « le réactif provient du fournisseur B »

C : « le réactif utilise la colorimétrie »

L'arbre ci-contre donne la répartition en proportion des réactifs.

On appelle P la variable aléatoire donnant le prix du réactif

- Donner la loi de probabilité de P sous forme de tableau.
- Calculer l'espérance de P . Interpréter dans le contexte.



Corrections Savoir Pb.2

Corrigé Entraînement n° 1

1) a. $p(V > 7) = p(V = 10) + p(V = 15) = \frac{1}{15} + \frac{4}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

b. $E(V) = 2 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{5} + 7 \times \frac{2}{15} + 10 \times \frac{1}{15} + 15 \times \frac{4}{15} = \frac{2 \times 5 + 5 \times 3 + 14 + 10 + 60}{15} = \frac{109}{15}$

c. à la calculatrice : $V(V) \simeq 79,533 - (7,266)^2 \simeq 26,7$ et $\sigma(V) \simeq 5,2$

2) a. L'évènement $A \cap B$ correspond à un gain de $10 + 6 = 16$

L'évènement $A \cap \bar{B}$ correspond à un gain de $10 - 6 = 4$... etc...

$p(A \cap B) = 0,02 = p(X = 16)$

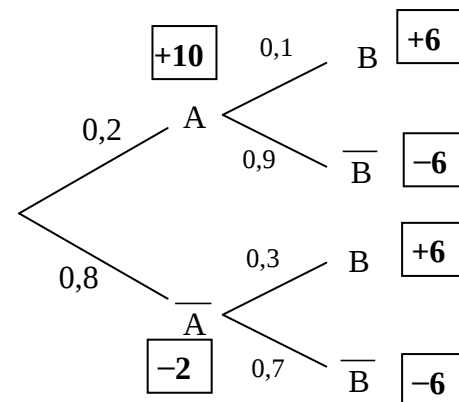
$p(A \cap \bar{B}) = 0,18 = p(X = 4)$

$p(\bar{A} \cap B) = 0,24 = p(X = -8)$

$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,56 = p(X = -16)$

La loi de probabilité de X est donc :

x_i	-8	4	16
$p(X = x_i)$	0,56	0,42	0,02



b) On a donc : $E(X) = 0,56 \times (-8) + 0,42 \times 4 + 0,02 \times 16 = -2,48 \text{ €}$.

c) Pour 40 parties, chaque joueur peut donc « espérer » perdre $40 \times 2,48 = 99,20 \text{ €}$. L'équipe de 15 joueurs doit donc craindre de perdre $15 \times 99,20 = 1488 \text{ €}$.

Corrigé Entraînement n° 2

1) a.

$$E = \sum_{k=1}^5 x_k \times p(X = x_k) = \sum_{k=1}^5 x_k \times \frac{x_k}{15} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2}{15} = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25}{15} = \frac{55}{15} = \frac{11}{3}$$

$$\begin{aligned} b. V(X) &= \sum_{k=1}^5 \left(x_k - \frac{11}{3}\right)^2 \times \frac{x_k}{15} \\ &= \frac{1}{15} \left(\left(1 - \frac{11}{3}\right)^2 \times 1 + \left(2 - \frac{11}{3}\right)^2 \times 2 + \left(3 - \frac{11}{3}\right)^2 \times 3 + \left(4 - \frac{11}{3}\right)^2 \times 4 + \left(5 - \frac{11}{3}\right)^2 \times 5 \right) \\ &= \frac{1}{15} \left(\frac{64}{9} + \frac{25}{9} \times 2 + \frac{4}{9} \times 3 + \frac{1}{9} \times 4 + \frac{16}{9} \times 5 \right) = \frac{1}{15} \times \frac{64 + 50 + 12 + 4 + 80}{9} = \frac{210}{135} \end{aligned}$$

donc $V(X) = \frac{14}{9}$ et $\sigma(X) = \sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$

c. $[E - \sigma; E + \sigma] = \left[\frac{11}{3} - \frac{\sqrt{14}}{3}; \frac{11}{3} + \frac{\sqrt{14}}{3}\right] \simeq [2,4; 4,9]$

2) a) l'évènement $A \cap C$ correspond à un coût de $3 + 1 = 4 \text{ €}$

avec une probabilité de $P(A \cap C) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$

l'évènement $A \cap \bar{C}$ correspond à un coût de 3 € avec une probabilité de $P(A \cap \bar{C}) = 0,06$ etc...

p_i	2,40	3	3,40	4
$p(P = p_i)$	0,48	0,06	0,32	0,14

b) $E(P) = 2,4 \times 0,48 + 3 \times 0,06 + 3,40 \times 0,32 + 4 \times 0,14 = 2,98$

En moyenne, un réactif revient à **2,98 €** au laboratoire.