

Corrections Savoir Sag. 4

Corrigé Exercice 19

1) a. $u_n = u_0 + nR = -15 + 24n$

b. $W_n = W_1 \times q^{n-1} = 4 \times 6^{n-1}$

c. $v_n = v_0 \times q^n = 5 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^n$ Attention à bien mettre les parenthèses pour la fraction, pour bien signaler que numérateur et dénominateur sont à la puissance n

d. $y_n = y_2 + R(n-2) = 152 - 11(n-2)$

Ne pas hésiter à développer (forme plus identifiable, comme si c'était à partir de y_0) :

$y_n = 152 - 11n + 22 = 174 - 11n$

2) a. $g_n = g_0 \times q^n = -9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

b. $H_n = H_1 + R(n-1) = 0 - 3(n-1) = 3 - 3n$

c. $R_n = R_0 + nR = 0,7 + 1,3n$ d. $s_n = s_2 \times q^{n-2} = -10 \times 1,06^{n-2}$

1) a. $u_n = u_1 + R(n-1) = 7 - 2(n-1)$
 $= 7 - 2n + 14 = 21 - 2n$

b. $w_n = w_0 \times q^n = 42 \times (-1)^n$

c. $D_n = D_1 \times q^{n-1} = 12 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

d. $c_n = c_0 + nR = \frac{1}{2} + \frac{4}{3}n$

2) a. $t_n = t_2 + R(n-2) = 30 - 10(n-2)$
 $= 50 - 10n$

b. $S_n = S_0 \times q^n = 8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Corrigé Exercice 20

a. On a $a_n = a_0 + nR = 203 - 18n$
 donc $a_{24} = 203 - 18 \times 24 = -229$

b. $b_n = b_1 \times q^{n-1} = 6 \times 1,5^{n-1}$
 donc $b_9 = 6 \times 1,5^8 \approx 153,77$

c. $C_n = C_0 \times q^n = 120 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$
 et donc $C_{11} = 120 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{11} = -\frac{120}{2^{11}} = -\frac{120}{2048} = -\frac{15}{256}$

d. $\Delta_n = \Delta_2 + R(n-2) = -2 + \frac{7}{3}(n-2)$ donc $\Delta_{20} = -2 + \frac{7}{3} \times 18 = -2 + 42 = 40$

a. $u_n = u_1 + R(n-1) = -50 + 12(n-1)$
 $u_n = -62 + 12n$

et $u_{24} = -62 + 12 \times 24 = 226$

b. $w_n = w_0 \times q^n = \frac{1}{64} \times (-2)^n$
 donc $w_8 = \frac{(-2)^8}{64} = \frac{256}{64} = 4$

Corrigé Exercice 21

1) a) dans un an : 18 ordis - dans deux ans : 21 ordis

b) Chaque année, le nombre d'ordinateur augmente de 3, donc $\begin{cases} v_{n+1} = v_n + 3 \\ v_0 = 15 \end{cases}$

C'est une suite géométrique de raison 3 $\Rightarrow v_n = v_0 + rn = 15 + 3n$

c) $u_n \geq 50 \Leftrightarrow 15 + 3n \geq 50 \Leftrightarrow 3n \geq 35 \Leftrightarrow n \geq \frac{35}{3}$ or $\frac{35}{3} \approx 11,667$ donc pour $n \geq 12$

Au bout de 12 ans

2) a) Si on double, il s'agit d'une suite géométrique de raison 2 et de 1^{er} terme $b_0 = 10 \times 10^6 = 10^7$

$$\Rightarrow b_n = b_0 \times q^n = 10^7 \times 2^n$$

b) $b_{24} = 10^7 \times 2^{24} = 167\,772\,160\,000\,000$ soit environ **167 mille milliards...** (mieux vaut ne pas laisser trainer une culture de bactérie... encore que ça a donné lieu à de belles découvertes médicales)

3) On appelle S_n la superficie estimée en l'année (2001 + n)

$$\text{On a } \begin{cases} s_{n+1} = s_n - 30\,000 \\ s_0 = 3\,506\,000 \end{cases} \Rightarrow \text{Suite arithmétique} \Rightarrow S_n = s_0 + rn = 3\,506\,000 - 30\,000n$$

Aujourd'hui, pour $n = 12$, on a $S_{12} = 3\,146\,000 \text{ km}^2$

Corrigé Exercice 22

x_n géométrique de raison -2 et de 1 ^{er} terme $x_0 = 1$	v_n arithmétique de raison -3 et de 1 ^{er} terme $v_0 = 1$	w_n ni l'un ni l'autre	y_n arithmétique de raison -1 et de 1 ^{er} terme $y_0 = 7$	$e_n = 3 \times 2 \times 2^n$ géométrique de raison 2 et de 1 ^{er} terme $e_0 = 6$
b_n géométrique de raison 5 et de 1 ^{er} terme $b_1 = -2$	$w_n = 14^n$ géométrique de raison 14 et de 1 ^{er} terme $w_0 = 1$	c_n arithmétique de raison 4 et de 1 ^{er} terme $c_0 = 0$	$s_n = \frac{1}{5} \times 3^n$ géométrique de raison 3 et de 1 ^{er} terme $s_0 = \frac{1}{5}$	g_n ni l'un ni l'autre
$d_n = 4 \times \frac{1}{3^n}$ $= 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1 ^{er} terme $d_0 = 4$	q_n arithmétique de raison 5 et de 1 ^{er} terme $q_1 = 3$	r_n ni l'un ni l'autre	t_n arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1 ^{er} terme $t_0 = -\frac{1}{3}$	h_n géométrique de raison -1 et de 1 ^{er} terme $h_n = 3$

Corrigé Exercice 23

1) a) $V_1 = 28 \text{ m}^3$ et $V_2 \simeq 26,1 \text{ m}^3$

b) $V_{n+1} = \frac{14}{15} V_n \Rightarrow$ la suite (V_n) est géométrique de raison $\frac{14}{15}$

$$\text{c) } V_n = V_0 \times q^n = 30 \times \left(\frac{14}{15}\right)^n$$

d) $V_5 = 30 \times \left(\frac{14}{15}\right)^5 \simeq 21,2 \Rightarrow$ Il restera environ 21 m^3 d'eau dans la mare au bout de la 5^{ème} semaine.

e) La suite est de raison positive inférieure à 1 $\Rightarrow$ elle est décroissante

On cherche à résoudre $V_n < 15$

À la calculatrice, on trouve $V_{10} \simeq 15,04$ et $V_{11} \simeq 14,04$

Au bout de 11 semaines de sécheresse la mare aura diminué de moitié

2) a) $u_n = 0,5 u_{n-1}$. b) Suite géométrique de raison 0,5

$$\text{c) } u_n = u_0 \times q^n = u_0 \times 0,5^n \Rightarrow \frac{u_n}{u_0} = 0,5^n$$

d) La suite $\left(\frac{u_n}{u_0}\right)$ est de raison positive inférieure à 1 $\Rightarrow$ elle est décroissante.

⇒ On cherche $\frac{u_n}{u_0} < 0,01$ À la calculatrice, on trouve $\frac{u_6}{u_0} = 0,5^6 \simeq 0,016$ et $\frac{u_7}{u_0} = 0,5^7 \simeq 0,008$

C'est donc au bout de 7 demi-vies, soit $7 \times 8 = 56$ jours, que la quantité restante d'iode 131 devient inférieure à 1% de la quantité émise lors de la catastrophe.

e) Avec la même démarche, on trouve cette fois $7 \times 30 = 210$ ans !!!

3) a) On appelle n le nombre d'heures écoulées à partir du moment où on remonte la pendule (à 15h16). On appelle R_n le retard pris par la pendule (On a $R_0 = 0$)

Attention, il faut convertir les minutes et les secondes en heures : $1 \text{ mn} = \frac{1}{60} \text{ h}$ et $1 \text{ s} = \frac{1}{3600} \text{ h}$

À chaque heure, la pendule retarde de 1min et 10 seconde (70 secondes, donc $\frac{70}{3600}$ d'heure)

⇒ Il s'agit d'une suite arithmétique : Récurrence :
$$\begin{cases} R_{n+1} = R_n + \frac{7}{360} \\ R_0 = 0 \end{cases}$$

Explicite : $R_n = R_0 + nR \Rightarrow R_n = \frac{7}{360} \times n$

b) Au bout de 3 jours, il y a $3 \times 24 = 72$ heures écoulées $\Rightarrow R_{72} = \frac{7}{360} \times 72 = 1,4$

Conversion 0,4 heures $\Rightarrow 0,4 \times 60 = 24$ minutes

Le retard pris par la pendule est donc de 1 heure et 24 minutes

À la même heure, elle marquera donc **13h52 !**

(15h16 – 1h24 = 13h52)

4) a) Si n est le numéro de la case de l'échiquier (on commence à $n = 1$) et r_n le nombre de grains de riz qu'il faut placer sur la n -ième case de l'échiquier, on a $r_1 = 1$ et $r_{n+1} = 2 \times r_n \Rightarrow$ **suite géométrique de raison 2**

b) À la calculatrice $r_{16} = \mathbf{32\,768}$ grains de riz

c) $\begin{cases} 1000 \text{ grains pour } 28 \text{ g} \\ ? \text{ grains pour } 1000 \text{ g} \end{cases} \Rightarrow$ Il faut 35 715 grains de riz... Par contre, attention, il faut additionner les grains de toutes les cases... On vient de voir qu'à la 16^{ème} case, on a en gros 33 000 grains de riz, à la 15^{ème}, la moitié etc... Donc si on additionne toutes les cases jusqu'à la 15^{ème}, on ne dépassera pas 33 000, il faut donc aller jusqu'à la **case 16**.

Si mon explication ne vous convainc pas (elle est en effet peu mathématique), le plus simple c'est de faire la suite qui additionne toutes les cases : $S_n = r_1 + r_2 + \dots + r_{n-1} + r_n$. Au tableur c'est assez simple, on trouve bien $S_{15} = 32\,767$ et $S_{16} = 65\,535$... CQFD

Sachez que, au final, le nombre de grains de riz que le sultan devra trouver pour remplir l'échiquier est $2^{64} - 1$, soit **18 446 744 073 709 551 615** grains de riz (18 milliards de milliards).

Si toute la surface arable de la terre produisait du riz, et rien que du riz, cela représenterait la production des prochaines 80 années (environ **4 millions de millions de tonnes de riz**).

Autre façon de dire la même chose, si ces grains de riz étaient mis bout à bout, cela représenterait la distance de la Terre à Alpha du Centaure (l'étoile la plus proche de la Terre après le soleil). Aller **et retour !**