

Sujet d'entraînement n°2

Exercice 5

On considère le cube $ABCDEFGH$ donné en annexe.

On donne trois points I, J et K vérifiant :

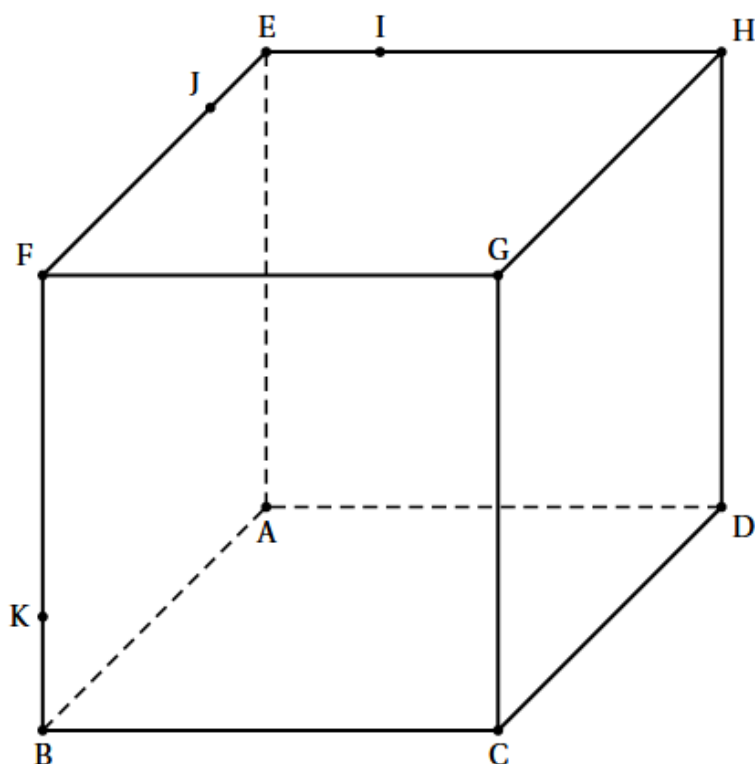
$$\overrightarrow{EI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EH} \quad , \quad \overrightarrow{EJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF} \quad , \quad \overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$$

Les points I, J et K sont représentés sur la figure donnée en annexe, à compléter et à rendre avec la copie.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

1. Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K .
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK) .
3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est $4x + 4y + 4z - 5 = 0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC) .
5. En déduire les coordonnées du point L , point d'intersection de la droite (BC) avec le plan (IJK) .
6. Sur la figure en annexe, placer le point L et construire l'intersection du plan (IJK) avec la face $(BCGF)$.
7. Soit $M\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right)$. Montrer que les points I, J, L et M sont coplanaires.

Annexe



Exercice 6

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront précisées à 10^{-4} près.

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, ... Une suite de 8 bits est appelé un octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

Partie A

On se place dans le cas où l'on envoie, sur le canal, successivement 8 bits qui forment un octet.

On envoie un octet au hasard. On suppose la transmission de chaque bit indépendante de la transmission des bits précédents. On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à 0,01.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
2. Déterminer la probabilité qu'exactly deux bits de l'octet soient mal transmis.
3. Que peut-on penser de l'affirmation suivante : « La probabilité que le nombre de bits mal transmis de l'octet soit au moins égal à trois est négligeable » ? Argumenter.
4. Calculer l'espérance de X . Interpréter dans le contexte.

Partie B

Afin de détecter si un ou plusieurs bits de l'octet sont mal transmis, on utilise un protocole de détection d'erreur. Il consiste à ajouter, à la fin de l'octet à transmettre, un bit, appelé bit de parité et qui est transmis après les huit bits de l'octet.

On s'intéresse désormais à la transmission de l'octet suivi de son bit de parité.

Une étude statistique a permis d'obtenir que :

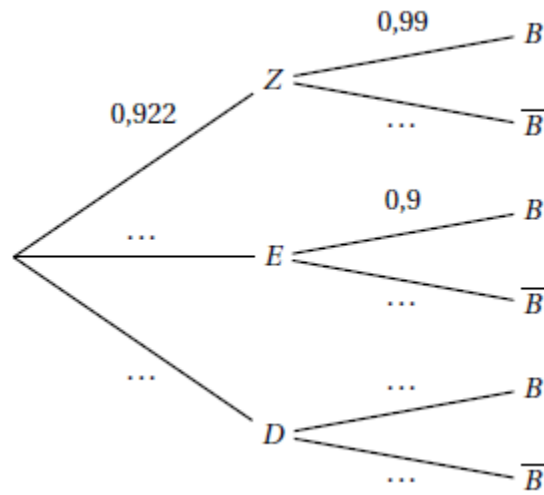
- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis sans erreur vaut 0,922;
- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis avec exactement une erreur vaut 0,075;
- si les huit bits (octet) ont été transmis sans erreur, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec exactement une erreur, la probabilité que le bit de parité ait été envoyé sans erreur vaut 0,9;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec au moins deux erreurs, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99.

On choisit au hasard un octet suivi de son bit de parité. On considère les événements suivants :

- Z : « les huit bits de l'octet sont transmis avec aucune erreur » ;
- E : « les huit bits de l'octet sont transmis avec exactement une erreur » ;
- D : « les huit bits de l'octet sont transmis avec au moins deux erreurs » ;
- B : « le bit de parité est transmis sans erreur ».

1. Compléter l'arbre pondéré de l'annexe 1 à rendre avec la copie.
2. Quelle est la probabilité que l'octet soit transmis avec une erreur exactement et que le bit de parité soit transmis sans erreur ?
3. Calculer la probabilité de l'évènement B .

Annexe 1



Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,95u_n + 200$.

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9\,415$.
2.
 - a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n \geq 4\,000$.
 - b. On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.
3. Pour tout entier naturel n , on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4\,000$.
 - a. Calculer v_0 .
 - b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.
 - c. En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n$.
 - d. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.
4. En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus.
L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.
Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021. Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».
Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 1]$ par $f(x) = x(1 - \ln x)^2$.

a. Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0; 1]$,
$$f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$$

b. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0; 1]$ (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

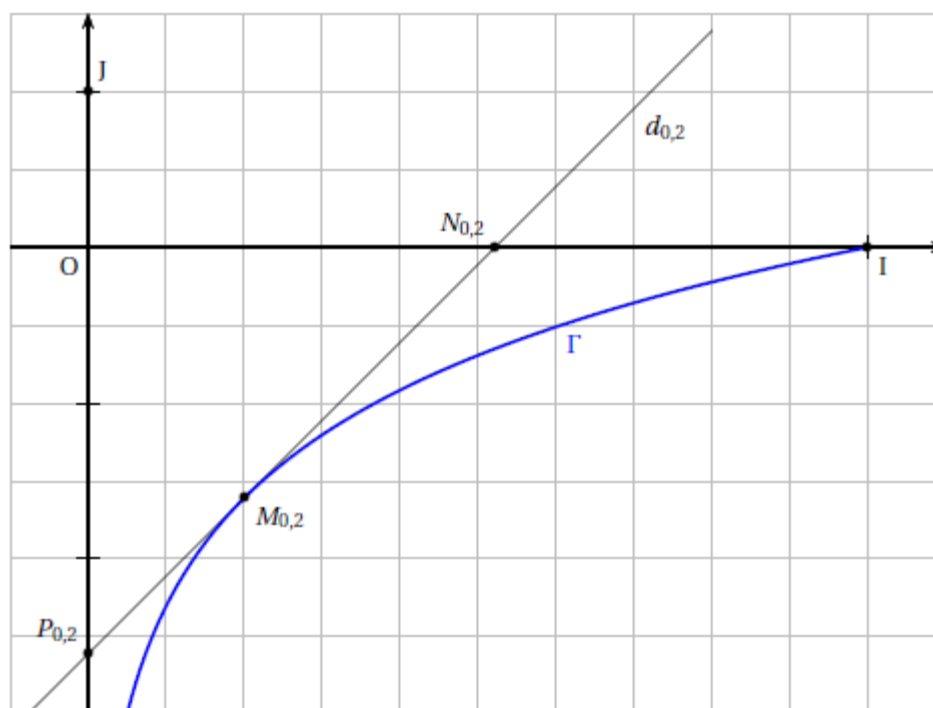
On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0; 1]$ par $g(x) = \ln x$.

Soit a un réel de l'intervalle $]0; 1]$.

On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a . Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a .

On s'intéresse à l'aire du triangle ON_aP_a quand le réel a varie dans l'intervalle $]0; 1]$.

2. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0,2$ et on donne la figure ci-dessous.



a. Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.

b. Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

c. Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$.

Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0; 1]$, l'aire du triangle ON_aP_a en unités d'aire est donnée par $\mathcal{A}(a) = \frac{1}{2}a(1 - \ln a)^2$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathcal{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.