

Savoir Sv.3 – Loi de concentration, taille d'échantillon

Exercice 10: Utilisation de l'inégalité de concentration

1. On considère des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ indépendantes qui sont chacune d'espérance 10 et de variance 3. On définit la variable aléatoire :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Quelle taille minimale d'échantillon n doit-on choisir afin d'être sûr à 90% que M_n se trouve entre 9 et 11 ?

2. On joue n fois à un jeu dans lequel l'espérance de gain est de 0,50 € avec un écart-type de 0,40 €. On note $G_1, G_2, \dots, G_n$ les variables aléatoires indépendantes donnant le gain de chaque partie.

On s'intéresse au gain moyen obtenu noté :

$$K_n = \frac{G_1 + G_2 + \dots + G_n}{n}$$

A combien de parties faut-il jouer au minimum pour avoir 95% de chances de gagner en moyenne entre 0,30 et 0,70 € par partie ?

Exercice 11: Type Bac – juin 2025 – Polynésie – n°1

On s'intéresse à un échantillon de 20 enfants atteints d'allergie alimentaire choisis au hasard.

L'âge d'apparition des premiers symptômes allergiques de ces 20 enfants est modélisé par les variables aléatoires $A_1, A_2, \dots, A_{20}$. On admet que ces variables aléatoires sont indépendantes et suivent la même loi d'espérance 4 et de variance 2,25. On considère la variable aléatoire :

$$M_{20} = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_{20}}{20}$$

1. Que représente la variable aléatoire M_{20} dans le contexte de l'exercice ?
2. Déterminer l'espérance et la variance de M_{20} .
3. Justifier, à l'aide de l'inégalité de concentration, que : $P(2 < M_{20} < 6) > 0,97$

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 12: Type Bac – juin 2025 – Asie – n°1

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de n jouets, où n est un entier strictement positif. On suppose que ce prélèvement se fait sur une quantité suffisamment grande de jouets pour être assimilé à une succession de n tirages indépendants avec remise.

On rappelle que la probabilité qu'un jouet réussisse le test de fabrication est égale à 0,95. Soit S_n la variable aléatoire qui compte le nombre de jouets ayant réussi le test de fabrication. On admet que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,95$.

1. Exprimer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n en fonction de n .
2. Dans cette question, on pose $n = 150$.
 - a. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(S_{150} = 145)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
 - b. Déterminer la probabilité qu'au moins 94% des jouets de ce lot réussissent le test de fabrication. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.

3. Dans cette question, l'entier naturel non nul n n'est plus fixé.

Soit F_n la variable aléatoire définie par : $F_n = \frac{S_n}{n}$.

La variable aléatoire F_n représente la proportion des jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets prélevés.

a. Montrer que $E(F_n) = 0,95$ et que $V(F_n) = \frac{0,0475}{n}$.

b. On s'intéresse à l'évènement I suivant : « la proportion de jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets est strictement comprise entre 93% et 97% ».

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur n de la taille du lot de jouets à prélever, à partir de laquelle la probabilité de l'évènement I est supérieure ou égale à 0,96.