

Savoir SV.3 : Variable aléatoire moyenne

Situation :

Pour un **échantillon de taille n** tiré selon une variable aléatoire X de caractéristiques (μ, σ) , la moyenne de l'échantillon observée suit la variable aléatoire :

$$M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

Où $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et sont toutes de caractéristiques (μ, σ)

L'espérance est l'espérance dans la population totale : $E(M_n) = E(X) = \mu$

La **variance** est : $V(M_n) = \frac{1}{n}V(X) = \frac{\sigma^2}{n}$ L'**écart-type** est : $\sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (inégalité de concentration)

$$\forall \delta > 0 : \quad P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{n\delta^2}$$

Exemple

Soit X la note à une épreuve de bac, d'espérance 9,5 et d'écart-type 2,5.

On prend un paquet de n copies choisies au hasard.

On note $X_1, X_2, \dots, X_n$ les variables aléatoires associées aux notes de ces n copies. Elles sont toutes identiques à X et indépendantes entre elles.

On note M_n la variable aléatoire définie par :

$$M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

1) Que représente la variable aléatoire M_n ?

2) Quelle est l'espérance de M_n ?

3) a. Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles l'écart-type de M_n est inférieur à 0,5 ?

b. dans ce cas, montrer que la probabilité que la moyenne du paquet soit comprise strictement entre 8,5 et 10,5 est supérieure à 75 %