

Corrigé métropole 2 – Sept. 2025

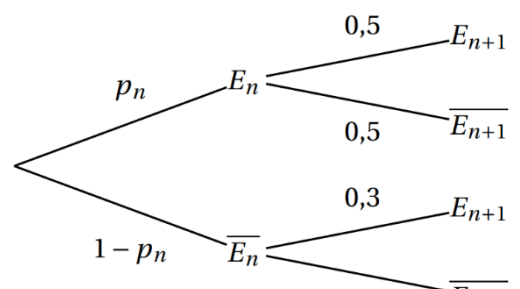
Corrigé Exercice 1

Partie A – Premier modèle

- Il s'agit d'une répétition de 10 épreuves de Bernoulli, indépendantes, avec une probabilité de succès égale à 0,4. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,4$.
- $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,4^2 \times 0,6^8 \simeq 0,1209$.
Il y a donc 12,09% de chances que le phénomène El Niño soit dominant exactement 2 années.
 - $P(X \leq 2) \simeq 0,1673$.
Il y a 13,73% de chances que le phénomène El Niño soit dominant au maximum 2 années sur les 10 ans.
- $E(X) = np = 10 \times 0,4 = 4$. En moyenne, le phénomène El Niño est dominant 4 années sur une période de 10 années.

Partie B – Second modèle

- Ci-contre.
- On a $p_1 = p(E_1) = p_0 \times 0,5 + (1 - p_0) \times 0,3$ avec $p_0 = 0$.
Donc $p_1 = 0 + 1 \times 0,3 = 0,3$ CQFD.
- On a : $p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p_n \times 0,5 + (1 - p_n) \times 0,3$
 $= 0,5p_n + 0,3 - 0,3p_n = 0,2p_n + 0,3$ CQFD.
- (Avec un tableau de valeurs à la calculatrice) il semble que (p_n) soit croissante et que sa limite soit égale à 0,375.



n	p_n
0	0
1	0,3
2	0,36
3	0,372
$\vdots$	$\vdots$
13	0,374 999 999 9
14	0,374 999 999 9

- On a d'une part $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{3}{8} = 0,2p_n + 0,3 - 0,375 = 0,2p_n - 0,075$.
Et d'autre part $0,2u_n = 0,2(p_n - 0,375) = 0,2p_n - 0,075$.
Ainsi $u_{n+1} = 0,2u_n$, donc (u_n) est géométrique de raison 0,2 avec $u_0 = p_0 - \frac{3}{8} = -\frac{3}{8}$.

- (u_n) est géométrique donc $u_n = u_0 \times q^n = -\frac{3}{8} \times 0,2^n$.

Or $u_n = p_n - \frac{3}{8} \Rightarrow p_n = \frac{3}{8} + u_n$.

On a donc $p_n = \frac{3}{8} - \frac{3}{8} \times 0,2^n = \frac{3}{8}(1 - 0,2^n)$. CQFD

- Puisque $0,2 \in]0; 1[$, on a $0,2^n \rightarrow 0$.

Ainsi, par limite de somme et de produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{3}{8}$$

- La probabilité d'observer phénomène El Niño dominant tend vers $\frac{3}{8}$ quand le nombre d'observations augmente.

Corrigé Exercice 2

1. On doit choisir 2 filles parmi 14 et 2 garçons parmi 10 :

$$\binom{14}{2} \times \binom{10}{2} = 4095 > 272$$

On peut constituer jusqu'à 4095 groupes différents, donc on peut en constituer 272.

L'affirmation est VRAIE.

2. L'équation de la tangente est :

$$y = f' \left(\frac{\pi}{2} \right) \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + f \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{Or } f \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad \text{et } f'(x) = 3 \times 2 \cos(2x + \pi) \Rightarrow f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 6$$

L'équation devient donc :

$$y = 6 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + 0 \Leftrightarrow y = 6x - 3\pi$$

L'affirmation est VRAIE.

3. On calcule : $F'(x) = 2 \ln(x) + (2x + 1) \times \frac{1}{x} = 2 \ln(x) + 2 + \frac{1}{x} \Rightarrow F' \neq f$

L'affirmation est FAUSSE.

4. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = 45e^{0,06t} + 20$.

Affirmation 4 : La fonction g est l'unique solution de l'équation différentielle (E_1) : $y' + 0,06y = 1,2$ vérifiant $g(0) = 65$.

$$\text{On calcule } g' + 0,06g = 45 \times 0,06e^{0,06t} + 0 + 0,06(45e^{0,06t} + 20) = 5,4e^{0,06t} + 1,2$$

$$\text{Donc } g' + 0,06g \neq 1,2.$$

L'affirmation est FAUSSE.

5. On considère l'équation différentielle : (E_2) : $y' - y = 3e^{0,4x}$

Affirmation 5 : Les solutions de l'équation (E_2) sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$.

Soit $g(x) = Ae^{0,4x}$. Pour que g soit solution de E_2 , il faut que $g' - g = 3e^{0,4x}$

$$\Rightarrow A \times 0,4e^{0,4x} - Ae^{0,4x} = 3e^{0,4x} \Rightarrow -0,6A = 3 \Rightarrow A = -5$$

Donc $g(x) = -5e^{0,4x}$ est une solution particulière de (E_2) .

D'autre part les solutions de $y' - y = 0 \Leftrightarrow y' = y$ sont les fonctions de la forme $y = Ke^x$, $K \in \mathbb{R}$.

Donc les solutions de (E_2) sont de la forme $y = Ke^x - 5e^{0,4x}$.

On alors $y' = Ke^x - 2e^{0,4x}$ et $y'' = Ke^x - 0,8e^{0,4x}$. Si $K = 0$, $y'' = -0,8e^{0,4x} < 0$ et la solution est alors concave et non pas convexe.

L'affirmation est FAUSSE.

(Remarque : il s'agissait d'une erreur d'énoncé dans le livret : la question lors du bac était :

Affirmation 5' : Les solutions **positives** de l'équation (E_2) sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$.

Ce qui se résout en écrivant : si $y > 0$ alors $y' = y + 3e^{0,4x}$ est positive donc $y'' = y' + 1,2e^{0,4x}$ est positive aussi donc effectivement y est alors convexe.

L'affirmation 5' est VRAIE)

Corrigé Exercice 3

Partie A

1. On calcule $\Delta = 49 + 32 = 81$. Il y a donc deux racines : $x_1 = \frac{-7-9}{-2} = 8$ et $x_2 = \frac{-7+9}{-2} = -1$.

On obtient donc le tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	8	$+\infty$	
$-x^2 + 7x + 8$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc l'ensemble des solutions est : $S = [-1; 8]$.

2. Pour $x \in]0; 8]$, on a donc $-x^2 + 7x + 8 \geq 0 \Rightarrow -x^2 + 7x + 9 \geq 1 \Rightarrow \ln(-x^2 + 7x + 9) \geq \ln(1) \Rightarrow 10 \ln(-x^2 + 7x + 9) \geq 0 \Rightarrow \frac{10 \ln(-x^2 + 7x + 9)}{x} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$. CQFD

3. Sur l'intervalle $]0; 8]$, la courbe C_f est donc au-dessus de l'axe des abscisses.

Partie B

1. On a : $x_N = x$ et $y_N = 0$ et on a $x_P = 0$ et $y_P = f(x) = \frac{10 \ln(-x^2 + 7x + 9)}{x}$.

2. On a $ON = x$ et $OP = \frac{10 \ln(-x^2 + 7x + 9)}{x}$ donc l'aire du rectangle $ONMP$ vaut :

$$\mathcal{A}(x) = ON \times OP = x \times \frac{10 \ln(-x^2 + 7x + 9)}{x} = 10 \ln(-x^2 + 7x + 9) \quad \text{CQFD}$$

3. Pour observer un maximum, il faut dresser le tableau de variation.

On calcule donc : $\mathcal{A}'(x) = 10 \times \frac{-2x+7}{-x^2+7x+9}$.

On a vu que $-x^2 + 7x + 9 \geq 1 > 0$ par élargissement.

On obtient donc le tableau :

x	0	$\frac{7}{2}$	8
$-2x + 7$	+	0	-
$-x^2 + 7x + 9$	+	6	+
$\mathcal{A}'(x)$	+	0	-
$\mathcal{A}(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

La fonction $\mathcal{A}$ admet donc un maximum en $x = \frac{7}{2}$ et ce maximum est :

$$\mathcal{A}\left(\frac{7}{2}\right) = 10 \ln(17) + 10 \ln(5) - 20 \ln(2) \simeq 30,56.$$

Partie C

1. Ci-contre.

2. Elle renvoie la valeur approchée par excès à 0,1 près de l'équation $\mathcal{A}(x) = 30$ pour $x \geq \frac{7}{2}$.

Or $f(4,5) > 30 > f(4,6)$ donc elle renvoie la valeur $x = 4,6$.

3. L'équation $\mathcal{A}(x) = 35$ n'a pas de solution, la fonction $\mathcal{A}$ est décroissante, donc « $\mathcal{A}(x) > k$ » sera toujours FAUX. La fonction ne pourra donc jamais s'arrêter et ne renverra pas de résultat.

```

8 |
9 | while A(x) > k:
10 |     x = x + 0.1
    | return x

```

Corrigé Exercice 4

1. a. On calcule : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

On constate que $x_{\overrightarrow{AC}} = \frac{4}{5}x_{\overrightarrow{AB}}$ alors que $y_{\overrightarrow{AC}} \neq \frac{4}{5}y_{\overrightarrow{AB}}$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires. Les points A, B, C ne sont pas alignés.

b. On calcule $29x_D + 30y_D - 17z_D = -309 \neq 35$ donc $D \notin (ABC)$.
Les points A, B, C et D ne sont donc pas coplanaires.

2. a. Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$x^* = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3}{2} \text{ (et de même) } y^* = \frac{0}{2} = 0 \text{ et } z^* = \frac{1}{2}.$$

b. P_1 étant un plan médiateur de $[AB]$, il a pour vecteur normal $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Son équation est donc de la forme : $-5x + 2y - 5z + d = 0$

Mais le milieu de $[AB]$ est sur P_1 donc $-5x^* + 2y^* - 5z^* + d = 0$

$$\Rightarrow d = 5 \times \frac{3}{2} - 2 \times 0 + 5 \times \frac{1}{2} = 10.$$

Donc l'équation de P_1 est : $-5x + 2y - 5z + 10 = 0 \Leftrightarrow 5x - 2y + 5z = 10$. CQFD

3. a. On a alors : $\overrightarrow{MC} \begin{pmatrix} x \\ y - 4 \\ z - 5 \end{pmatrix} \Rightarrow MC^2 = (\sqrt{x^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2})^2$

$$\Rightarrow MC^2 = x^2 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 10z + 25 = x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 10z + 41.$$

De même :

$$MD^2 = (x + 3)^2 + (y + 4)^2 + (z - 6)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 8y - 12z + 61.$$

Or, P_2 étant le plan médiateur de $[CD]$, on a donc :

$$M \in P_2 \Leftrightarrow MC = MD \Leftrightarrow MC^2 = MD^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 10z + 41 = x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 8y - 12z + 61$$

$$\Leftrightarrow -8y - 10z + 41 = 6x + 8y - 12z + 61 \Leftrightarrow -6x - 16y + 2z = 20$$

$$\Leftrightarrow -3x - 8y + z = 10.$$

Ceci est donc effectivement l'équation de P_2 .

b. P_1 et P_2 ont pour vecteurs normaux $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Or $\frac{x_{\vec{n}_2}}{x_{\vec{n}_1}} \neq \frac{y_{\vec{n}_2}}{y_{\vec{n}_1}}$ donc ils ne sont pas colinéaires. P_1 et P_2 sont donc sécants.

4. 1^{re} méthode :

Soit le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1,9 \\ 1 \\ 2,3 \end{pmatrix}$. On constate que : $\vec{u} \cdot \vec{n}_1 = -9,5 - 2 + 11,5 = 0$

et de même que : $\vec{u} \cdot \vec{n}_2 = 0$.

Donc $\vec{u} \perp \vec{n}_1$ et $\vec{u} \perp \vec{n}_2$ donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur à la fois de P_1 et de P_2 , il est donc un vecteur directeur de leur intersection Δ .

Soit $K(-2; 0; 4)$, on calcule : $5x_K - 2y_K + 5z_K = -10 - 0 + 20 = 10 \Rightarrow K \in P_1$.

De même, $-3x_K - 8y_K + z_K = 10 \Rightarrow K \in P_2$.

Ainsi, $K \in \Delta$.

Avec le point K et le vecteur $\vec{u}$, on obtient alors effectivement la représentation paramétrique :

$$\Delta : \begin{cases} x = -2 - 1,9t \\ y = t \\ z = 4 + 2,3t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

2^e méthode :

Tout point N de Δ a des coordonnées de la forme $\begin{cases} x_N = -2 - 1,9t \\ y_N = t \\ z_N = 4 + 2,3t \end{cases}$.

On calcule donc : $5x_N - 2y_N + 5z_N = 5(-2 - 1,9t) - 2t + 5(4 + 2,3t)$
 $= -10 - 9,5t - 2t + 20 + 11,5t = 10 \Rightarrow N \in P_1.$

Et on calcule de même : $-3x_N - 8y_N + z_N = -3(-2 - 1,9t) - 8t + (4 + 2,3t) = 10 \Rightarrow N \in P_2.$

Donc tout point N de Δ est à la fois sur P_1 et sur P_2 : Δ est donc l'intersection de P_1 et de P_2 .

5. Soit le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1,9 \\ 1 \\ 2,3 \end{pmatrix}$, vecteur directeur de Δ . Le plan P_3 a pour vecteur normal $\vec{n}_3 \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On calcule : $\vec{u} \cdot \vec{n}_3 = -16 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{n}_3$ ne sont pas orthogonaux, donc $\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur de P_3 donc Δ et P_3 sont sécants.

6. Le point H est le point qui vérifie : $AH = BH = CH = DH$.

Appelons R le point d'intersection de Δ et de P_3 .

On sait que $\Delta = P_1 \cap P_2 \Rightarrow R \in P_1$ et $R \in P_2$.

Or P_1 est le plan médiateur de $[AB]$ donc $AR = BR$.

Et P_2 est le plan médiateur de $[CD]$ donc $CR = DR$.

Mais R est aussi sur P_3 qui est le plan médiateur de $[AC]$ donc $AR = CR$.

Au total, on a donc bien l'égalité des quatre longueurs : $AR = BR = CR = DR$.

Donc le point R d'intersection entre Δ et P_3 est bien le point H .