

Savoir Pb.4 : Loi binomiale - $P(X \leq k)$ etc...

Entraînement n° 1

1) La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(8 ; 0,4)$.

- Déterminer la valeur exacte de $p(X \geq 1)$
- Déterminer, en détaillant les étapes, les valeurs approchées au millième de :
 $p(X \leq 6)$; $p(X > 4)$ et $p(5 \leq X \leq 7)$

2) Un dé a environ 17 % de chance de tomber sur la face 6. On lance 5 dés en même temps. On appelle S la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 obtenus.

- Quelle loi de probabilité suit la variable S ? Justifier.
- Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 2 fois une face 6 ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir au maximum 3 faces 6 ?

Donner les valeurs approchées à 0,1 %

Entraînement n° 2

1) La variable aléatoire Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(11 ; \frac{3}{4}\right)$.

- Déterminer la valeur exacte de $p(Y \leq 10)$
- Déterminer, en détaillant les étapes, les valeurs approchées au centième de :
 $p(Y < 7)$; $p(Y \geq 3)$ et $p_{(Y \leq 9)}(Y > 4)$

2) Selon une étude épidémiologique sur une maladie infectieuse au cours d'une épidémie, 32 % de la population a été infectée par le virus. On choisit au hasard un échantillon de 30 personnes. On appelle M la variable aléatoire qui compte le nombre de personne qui ont été malade au cours de l'épidémie.

- La variable M suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
- Quelle est la probabilité qu'il y ait moins de 10 personnes qui aient été malades ?
- Quelle est la probabilité qu'il y ait entre 10 et 20 personnes qui aient été malades ?

Donner les valeurs approchées à 0,1 %

Entraînement n° 3

1) La variable aléatoire Z suit une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,9$

- Déterminer la valeur exacte de $p(Z > 13)$
- Déterminer, en détaillant les étapes, les valeurs approchées au millième de :
 $p(Z \geq 10)$ et $p_{(Z \geq 3)}(Z < 12)$

2) Un chocolatier prépare environ 25 % de ses chocolats au praliné. Il vend des assortiments de chocolats en boîtes de 20 chocolats. On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de chocolats au praliné dans chaque boîte. On admet que la variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$

- Quelle est la probabilité d'obtenir plus de 10 chocolats au praliné dans une boîte ?
- Si le chocolatier fait attention à ce qu'il y ait au moins 5 chocolats au praliné dans chaque boîte, quelle serait alors la probabilité qu'il y en ait plus de 10 ?

Corrections Savoir Pb.4

Corrigé Entraînement n° 1

1) a. $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 1 \times 0,4^0 \times (1 - 0,4)^{8-0} = 1 - 0,6^8$

b. $p(X \leq 6) \simeq 0,991$ (directement à la calculatrice)

$$p(X > 4) = 1 - p(X \leq 4) \simeq 0,174$$

$$p(5 \leq X \leq 7) = p(X \leq 7) - p(X \leq 4) \simeq 0,173$$

2) a. Il s'agit de 5 tirages identiques et indépendants donc chacun a la probabilité de 17 % d'être un succès : la variable S suit une loi **binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,17$**

b. $p(S \geq 2) = 1 - p(S \leq 1) \simeq 0,203$ La probabilité d'obtenir au moins 2 fois un 6 est d'environ 20,3 %

c. $p(X \leq 3) \simeq 0,996$ La probabilité d'obtenir au plus 3 faces 6 est d'environ 99,6 %

Corrigé Entraînement n° 2

1) a. $p(Y \leq 10) = 1 - p(X = 11) = 1 - 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{11} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right)^0 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{11}$

b. $p(Y < 7) = p(Y \leq 6) \simeq 0,11$

$$p(Y \geq 3) = 1 - p(Y \leq 2) \simeq 0,99 \text{ (en fait } \simeq 1 \text{ car au centième } 0,99987... \simeq 1)$$

$$p_{(Y \leq 9)}(Y > 4) = \frac{p((Y \leq 9) \cap (Y > 4))}{p(Y \leq 9)} = \frac{p(4 < Y \leq 9)}{p(Y \leq 9)} = \frac{p(Y \leq 9) - p(Y \leq 4)}{p(Y \leq 9)} \simeq 0,99$$

2) a. La variable M suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,32$

b. $p(M \leq 10) \simeq 0,645$ Il y a 64,5 % de chances qu'il y ait moins de 10 personnes qui aient été malades.

c. $p(10 \leq M \leq 20) = p(M \leq 20) - p(M \leq 9) \simeq 0,506$

La probabilité qu'il y ait entre 10 et 20 personnes qui aient été malades est d'environ 50,6 %

Corrigé Entraînement n° 3

1) a. $p(Z > 13) = p(Z = 14) + p(Z = 15) = 15 \times 0,9^{14} \times 0,1 + 1 \times 0,9^{15}$
 $= 0,9^{14}(1,5 + 0,9) = 2,4 \times 0,9^{14}$

b. $p(Z \geq 10) = 1 - p(Z \leq 9) \simeq 0,998$

$$p_{(Z \geq 3)}(Z < 12) = \frac{p((Z \geq 3) \cap (Z < 12))}{p(Z \geq 3)} = \frac{p(3 \leq Z < 12)}{1 - p(Z \leq 2)} = \frac{p(Z \leq 11) - p(Z \leq 2)}{1 - p(Z \leq 2)} \simeq 0,56$$

2) a. $p(X \geq 10) = 1 - p(X \leq 9) \simeq 0,014$

Il y a environ 1,4 % de chances d'obtenir plus de 10 chocolats au praliné.

$$b. p_{(X \geq 5)}(X \geq 10) = \frac{p((X \geq 5) \cap (X \geq 10))}{p(X \geq 5)} = \frac{p(X \geq 10)}{1 - p(X \leq 4)} = \frac{1 - p(X \leq 9)}{1 - p(X \leq 4)} \simeq 0,024$$

Il y aura alors environ 2,4 % de chances d'obtenir plus de 10 chocolats au praliné.