

Corrigé Exercice 10

$$\begin{aligned}
 a) \int_{-3}^4 f(t)dt &= \int_{-3}^1 f(t)dt + \int_1^4 f(t)dt = I + J = -2 + 3 = 1 \\
 b) \int_{-3}^1 g(t)dt &= \int_{-3}^4 g(t)dt - \int_1^4 g(t)dt = K - L = -1 - 1 = -2 \\
 c) \int_1^4 (f(t) + g(t))dt &= \int_1^4 f(t)dt + \int_1^4 g(t)dt = J + L = 3 + 1 = 4 \\
 d) \int_{-3}^1 (f - g)(t)dt &= \int_{-3}^1 f(t)dt - \int_{-3}^1 g(t)dt = -2 - (-2) = 0 \\
 e) \int_{-3}^4 (4g - 3f)(t)dt &= 4K - 3(I + J) = 4 \times (-1) - 3 \times 1 = -7
 \end{aligned}$$

Corrigé Exercice 11

1) a) Une exponentielle est toujours positive,

$$\text{donc } e^{-x^3} > 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 e^{-x^3} dx > 0$$

b) Pour $t \geq 2$, on a $(1 - t) \ln t < 0$ donc $\int_2^e (1 - t) \ln t dt < 0$

t	0	1	$+\infty$
$1-t$		+	0 -
$\ln t$		-	0 +
Π		-	0 -

c) $\Delta = 16$; $x_1 = 3$ et $x_2 = -1$ du signe de a à l'extérieur des racines, donc négatif sur $[-1; 3]$
 $\Rightarrow$ Sur $[0; 2]$, $x^2 - 2x - 3 < 0$ donc $\int_0^2 (x^2 - 2x - 3)dx < 0$

2) a. $x^2 \leq x \Leftrightarrow x^2 - x \leq 0$ Or, d'après le tableau de signe, pour $0 \leq x \leq 1$, on a bien $x^2 - x \leq 0$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
$x^2 - x$		+	0	-	0	+

Alors pour $0 \leq x \leq 1$ on a : $x^2 \leq x \Leftrightarrow -x^2 \geq -x$ et comme la fonction exponentielle est croissante, $e^{-x^2} \geq e^{-x}$

Donc, avec la propriété de positivité de l'intégrale, on a bien $\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \int_0^1 e^{-x} dx$

b. Pour $t \in [0; 1]$, on a $t^2 \geq t^3 \Leftrightarrow 1 + t^2 \geq 1 + t^3 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^3}$

On a alors, par positivité de l'intégrale, $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt$ et $I \leq J$

3) a. D'une part. $t \geq 0 \Rightarrow t^2 \geq 0 \Rightarrow 1 + t^2 \geq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

Reste à démontrer que $1 - t^2 \leq \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow$ On cherche le signe de la différence (méthode souvent efficace)

$$1 - t^2 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{(1-t^2)(1+t^2)-1}{1+t^2} = \frac{1+t^2-t^2-t^4-1}{1+t^2} = \frac{-t^4}{1+t^2} \leq 0 \quad \text{car } t \geq 0$$

$$1 - t^2 - \frac{1}{1+t^2} \leq 0 \Leftrightarrow 1 - t^2 \leq \frac{1}{1+t^2} \quad \text{Conclusion : on a bien, pour tout } t \in [0; 1] : 1 - t^2 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$$

b. On en déduit que $\int_0^1 (1 - t^2)dt \leq I \leq \int_0^1 1 dt$

$$\text{Or } \int_0^1 (1 - t^2)dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \left(1 - \frac{1}{3} \right) - (0) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \int_0^1 1 dt = 1 - 0 = 1 \Rightarrow \text{Donc } \frac{2}{3} \leq I \leq 1$$