

Corrigé métropole 1 – Juin 2024

Corrigé Exercice 1

1. Affirmation 1 : VRAIE

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 \frac{x}{e^x}$ et par limites comparées, on a alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5xe^{-x} = 0$
Donc la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est bien asymptote à la courbe C_f .

Affirmation 2 : VRAIE

On a $f'(x) = 5e^{-x} + 5x(-e^{-x}) = (5 - 5x)e^{-x}$

Alors : $y' + y = (5 - 5x)e^{-x} + 5xe^{-x} = (5 - 5x + 5x)e^{-x} = 5e^{-x}$

2. Affirmation 3 : FAUX

Ici il faut trouver un contre-exemple pour prouver que c'est faux

Par exemple : $u_n = -1 - \frac{1}{n}$; $v_n = (-1)^n$ et $w_n = 1 + \frac{1}{n}$

On a bien $-1 - \frac{1}{n} \leq (-1)^n \leq 1 + \frac{1}{n}$ donc $u_n \leq v_n \leq w_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$

Mais par contre, la suite (v_n) n'a pas de limite.

Affirmation 4 : VRAIE

(u_n) est croissante $\Rightarrow u_n \geq u_0$ et (w_n) est décroissante donc $w_n \geq w_0$

On a donc $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq w_0$ et par conséquent $u_0 \leq v_n \leq w_0$.

Corrigé Exercice 2

1. $\Rightarrow$

2. $p(I \cap S) = p(I) \times p_I(S) = 0,6 \times 0,75 = 0,45$

Il y a 45 % de chances que le client ait acheté sur internet et soit satisfait.

3. $P(S) = p(I \cap S) + p(M \cap S) + p(G \cap S)$
 $= 0,45 + 0,3 \times 0,9 + 0,1 \times 0,8 = 0,45 + 0,27 + 0,08 = 0,8.$

4. $p_S(I) = \frac{p(I \cap S)}{p(S)} = \frac{0,45}{0,8} = 0,5625$

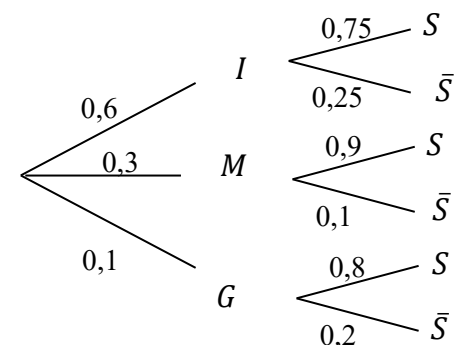
Si le client est satisfait, alors il y a environ 56,3 % de chances qu'il ait acheté sur internet.

5. a. Il s'agit de la répétition de 30 expériences de Bernoulli, toutes identiques et indépendantes, de probabilité de succès de 0,8 : **X suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,8$.**

b. $p(X \geq 25) = 1 - p(X \leq 24) \simeq 0,428$

Il y a environ 43% de chances qu'au moins 25 clients soient satisfaits

6. Qu'« au moins un client ne soit pas satisfait » est l'évènement contraire de « tous les clients sont satisfaits »



On cherche la probabilité $1 - p(X = n) = 1 - \binom{n}{n} \times 0,8^n \times 0,2^{n-n} = 1 - 0,8^n$

On cherche n tel que : $1 - p(X = n) \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - 0,8^n \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,8^n \leq 0,01$

$\Leftrightarrow \ln(0,8^n) \leq \ln 0,01 \Leftrightarrow n \ln 0,8 \leq \ln 0,01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8}$ car $\ln 0,8 < 0$

On a $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \simeq 20,6$ et n est un entier, donc $\Rightarrow n \geq 21$

Il faut interroger au moins 21 clients pour avoir 99% de chance d'en avoir au moins 1 insatisfait

7. a. $E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$

Les évènements T_1 et T_2 sont indépendants, donc $V(T) = V(T_1) + V(T_2) = 3$

b. On veut $5 \leq T \leq 9 \Leftrightarrow 4 < T < 10$ Avec $E = 7$ on a $E - 3 = 4$ et $E + 3 = 10$

On a $P(5 \leq T \leq 9) = P(|T - 7| < 3)$

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev $P(|X - E| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$ pour $\delta = 3$

Donc $P(|T - 7| \geq 3) \leq \frac{3}{3^2}$

On a $P(|T - 7| < 3) = 1 - P(|T - 7| \geq 3)$ et $P(|T - 7| < 3) \geq 1 - \frac{1}{3}$

On a bien $P(5 \leq T \leq 9) \geq \frac{2}{3}$

Il y a au moins 2 chances sur 3 que le client reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande.

Corrigé Exercice 3

1. a. Le plan (CAD) a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DA} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{CA} = 5 - 5 + 0 = 0$ et $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{DA} = 5 - 5 + 0 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal aux 2 vecteurs directeurs du plan (CAD) : c'est bien **un vecteur normal du plan**.

b. Le plan (CAD) a une équation cartésienne du type $1x - 1y + 0z + d = 0$ et comme $C \in (CAD)$, on a $x_C - y_C + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

donc le plan (CAD) a bien pour équation cartésienne : $x - y = 0$.

2. a. Si H est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et (CAD) on a $x_H - y_H = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}t - \left(5 - \frac{5}{2}t\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{10}{2}t - 5 = 0 \Leftrightarrow 5t = 5 \Leftrightarrow t = 1$ alors $\begin{cases} x_H = \frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{2} \\ y_H = 5 - \frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{2} \\ z_H = 0 \end{cases}$

On a bien pour coordonnées du point d'intersection : $H \left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0 \right)$

b. La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u} \left(\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}; 0 \right)$ et on a $\vec{u} = \frac{5}{2} \vec{n_1}$.

Donc $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan (CAD) et le coupe au point H

De plus, la droite $\mathcal{D}$ passe par le point de coordonnées $(0; 5; 0)$ c'est-à-dire $B \in \mathcal{D}$

Donc le point H est bien le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD)

3. a. (BH) est orthogonale au plan (CAD) , donc à toute droite du plan, en particulier à la droite (HA)
 Donc que le triangle ABH est bien rectangle en H
 (Vous pouvez aussi calculer $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} \dots$)

b. $\mathcal{A}_{(ABH)} = \frac{AH \times BH}{2}$ avec $AH = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 5\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 5\right)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

et $BH = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 5\right)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

$\mathcal{A}_{(ABH)} = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{50}{8} = \frac{25}{4}$ **CQFD**

4. a. Il s'agit de démontrer que $(CO) \perp (ABH)$ et que $O \in (ABH)$

De façon évidente, le plan (ABH) a pour équation cartésienne $z = 0$ donc $O \in (ABH)$

De plus, on a $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times (-5) + 0 \times 0 + 10 \times 0 = 0$

et $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 0 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 10 \times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{OC}$ est orthogonal au plan (ABH)

(CO) est bien la hauteur du tétraèdre $ABCH$ issue de C

b. $\mathcal{V}_{ABCH} = \frac{OC \times \mathcal{A}_{(ABH)}}{3} = \frac{1}{3} \times 10 \times \frac{25}{4} = \frac{125}{6}$

5. La distance d du point H au plan (ABC) est la hauteur issue de H du tétraèdre $ABCH$

On a donc $\mathcal{V}_{ABCH} = \frac{d \times \mathcal{A}_{(ABC)}}{3}$

Or, si ABC est rectangle en B , on a $\mathcal{A}_{(ABC)} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{25 + 0 + 0} \times \sqrt{0 + 25 + 100} = \frac{25\sqrt{5}}{2}$

Donc $\mathcal{V}_{ABCH} = \frac{25\sqrt{5}}{6} \times d$ et on sait de la question précédente que $\mathcal{V}_{ABCH} = \frac{125}{6}$

Donc $\frac{25\sqrt{5}}{6} \times d = \frac{125}{6} \Leftrightarrow d = \frac{125}{25\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

La distance d du point H au plan (ABC) est de $\sqrt{5}$

Corrigé Exercice 4

Partie A

1. a. On a $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$ donc par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

On a $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$ donc par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

1. b. $f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2x} = \frac{2x+1}{2x}$ **CQFD**

c.

x	0	$+\infty$
$2x+1$		+
$2x$	0	+
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow +\infty$

d. On a $f''(x) = \frac{2 \times 2x - (2x+1) \times 2}{(2x)^2} = \frac{4x - 4x - 2}{4x^2} = -\frac{2}{4x^2} = -\frac{1}{2x^2}$

On a donc f'' qui est strictement négative sur $]0; +\infty[$: la fonction f est concave sur $]0; +\infty[$

2. a. On a $f(1) = 1 - 2 + \frac{1}{2} \ln 1 = -1$ et $f(2) = 2 - 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2$

f est continue et strictement croissante sur $[1; 2]$ et on a $f(1) < 0 < f(2)$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1; 2]$

b. On a alors :

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$		- 0	+

c. $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 2 + \frac{1}{2} \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \alpha = -\alpha + 2 \Leftrightarrow \ln(\alpha) = 2(-\alpha + 2)$ CQFD

Partie B

1. $g'(x) = -\frac{7}{8} \times 2x + 1 - \frac{1}{4} \times 2x \ln x - \frac{1}{4} x^2 \times \frac{1}{x} = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x - \frac{1}{4}x = -2x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x$

On a $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 2 - \frac{1}{2} \ln x$

Donc $xf\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} - 2 - \frac{1}{2} \ln x\right) = \frac{x}{x} - 2x - \frac{1}{2}x \ln x = 1 - 2x - \frac{1}{2}x \ln x = g'(x)$ CQFD

2. a. Pour un $x > 0$ l'inégalité $x < \frac{1}{\alpha}$ revient, en passant à l'inverse, à $\frac{1}{x} > \alpha$

Or, pour $X > \alpha$, on a $f(X) > 0$ donc $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$

b. $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{7}{8\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{4\alpha^2} \ln \alpha$ et $g(1) = -\frac{7}{8} + 1 = \frac{1}{8}$.

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	1
$f\left(\frac{1}{x}\right)$		+	0 -
x	0	+	+
$g'(x)$		+	0 -
$g(x)$		$\nearrow g\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	$\searrow \frac{1}{8}$

Partie C

1. $g(x) - y = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x - \frac{7}{8}x^2 + x$
 $= -\frac{1}{4}x^2 \ln x$

On a pour tout $x \in]0; 1]$ à la fois $-\frac{1}{4}x^2 \leq 0$ et $\ln x \leq 0$

donc, par produit : $g(x) - y \geq 0$ et $g(x) \geq y \Rightarrow$ La courbe $\mathcal{C}_g$ est au dessus de la parabole $\mathcal{P}$

b. On pose $u' = x^2$ et $v = \ln x$, et donc on a : $u = \frac{x^3}{3}$ et $v' = \frac{1}{x}$ Par intégration par partie :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_{\frac{1}{\alpha}}^1 - \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx = \frac{1^3}{3} \ln 1 - \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3}{3} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \frac{x^2}{3} dx$$

$$= 0 + \frac{1}{3\alpha^3} \ln(\alpha) - \left[\frac{x^3}{9} \right]_{\frac{1}{\alpha}}^1 = \frac{1}{3\alpha^3} \ln(\alpha) - \left(\frac{1^3}{9} - \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3}{9} \right) = \frac{1}{3\alpha^3} \ln(\alpha) - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3}$$

Comme on a $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$:

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x dx = \frac{3}{9\alpha^3} 2(2 - \alpha) - \frac{\alpha^3}{9\alpha^3} + \frac{1}{9\alpha^3} = \frac{6(2 - \alpha) - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3} = \frac{12 - 6\alpha - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3}$$

Et on a bien : $\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$

2. $\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 (g(x) - y) dx = \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) dx = \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 -\frac{1}{4}x^2 \ln x dx$

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{4} \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x dx = -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3} = \frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3}$$