

Corrections Suites et intégrales

Vrai-faux : CORRIGÉ

1. On a

$$v_{n+1} - v_n = \int_1^{n+1} \ln x \, dx - \int_1^n \ln x \, dx = \int_1^{n+1} \ln x \, dx + \int_n^1 \ln x \, dx = \int_n^{n+1} \ln x \, dx$$

Pour $x \geq 1$, on a $\ln x \geq 0$, donc $\int_n^{n+1} \ln x \, dx \geq 0$ et par conséquent $v_{n+1} - v_n \geq 0 \Leftrightarrow v_{n+1} \geq v_n$

La suite (v_n) est bien croissante. $\Rightarrow$ **Affirmation 1 : VRAIE**

2. On a

$$I_{n+1} = \int_1^e [\ln(x)]^{n+1} \, dx = \int_1^e 1 \times [\ln(x)]^{n+1} \, dx$$

Alors, on peut faire une intégration par partie avec $u = [\ln(x)]^{n+1}$ et $v' = 1$

et donc $u' = (n+1) \times \frac{1}{x} \times [\ln(x)]^n$ et $v = x$

$$I_{n+1} = [x[\ln(x)]^{n+1}]_1^e - \int_1^e (n+1) \times \frac{1}{x} \times [\ln(x)]^n \times x \, dx$$

$$I_{n+1} = e \times [\ln(e)]^{n+1} - 1 \times [\ln(1)]^{n+1} - (n+1) \int_1^e \frac{x}{x} \times [\ln(x)]^n \, dx$$

$$I_{n+1} = e \times [1]^{n+1} - 1 \times [0]^{n+1} - (n+1) \int_1^e [\ln(x)]^n \, dx$$

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

Affirmation 2 : VRAIE .

Extrait 1 : CORRIGÉ

1. On peut faire une intégration par partie avec $u = x$ et $v' = e^{-x}$ et donc $u' = 1$ et $v = -e^{-x}$

$$\begin{aligned} I_n &= [-xe^{-x}]_1^n - \int_1^n -e^{-x} \, dx = -xe^{-x} - (-xe^{-x}) - [e^{-x}]_1^n = -ne^{-n} + e^{-1} - (e^{-n} - e^{-1}) \\ &= (-n-1)e^{-n} + 2e^{-1} = \frac{2}{e} - \frac{(n+1)}{e^n} \end{aligned}$$

2. a. On vérifie la position relative de la courbe de la fonction f et de la droite Δ

On a $f(x) - y = xe^{-x} + 2x - 1 - (2x - 1) = xe^{-x} + 2x - 1 - 2x + 1 = xe^{-x}$

Donc, pour $x \geq 1$, on a $xe^{-x} \geq 0$ et $f(x) \geq y \Rightarrow$ La courbe est au-dessus de la droite Δ

L'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ est donc donnée par :

$$\int_1^n (f(x) - y) \, dx = \int_1^n xe^{-x} \, dx = I_n.$$

b. On a par croissance comparée : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{e^n} = 0$ Alors, par somme de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{e} - \frac{n+1}{e^n} = \frac{2}{e}$$

L'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ tend vers $\frac{2}{e}$ quand n tend vers $+\infty$.

Sujet 1: CORRIGÉ

Partie A

$$1. f_1'(x) = 1 \times e^{1-x} + x \times (-e^{1-x}) = (1-x)e^{1-x}$$

On a le tableau de signes $\Rightarrow$

Donc f est bien strictement positive pour tout réel x de $[0; 1[$.

$$2. f_1(0) = 0 \text{ et } f_1(1) = 1e^{1-1} = 1$$

3. La fonction f_1 est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$ avec $0, 1 \in [f_1(0); f_1(1)]$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_1(x) = 0,1$ admet une unique solution dans $[0; 1]$

x	0	1
$1-x$	+	0
e^{1-x}	+	
$f_1'(x)$	+	0
$f_1(x)$	0	1

Partie B

1. a. $x \in [0; 1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$ or si $x \geq 0$ alors $x^n \geq 0$ pour toute valeur entière de n

On peut alors multiplier l'encadrement par x^n : $0 \times x^n \leq x \times x^n \leq 1 \times x^n \Leftrightarrow 0 \leq x^{n+1} \leq x^n$
et pour tout entier naturel n non nul : $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$

b. On a $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$ et l'exponentielle est positive donc $0 \leq x^{n+1} e^{1-x} \leq x^n e^{1-x}$

Par positivité de l'intégrale, on obtient donc $0 \leq \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$

Et donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$

c. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par zéro : d'après le théorème des suites monotones bornées, elle est donc convergente.

$$2. a. \text{ On a } u_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx$$

On peut faire une intégration par partie avec $u = x^{n+1}$ et $v' = e^{1-x}$ et donc $u' = (n+1)x^n$ et $v = -e^{1-x}$

$$u_{n+1} = [-x^{n+1}e^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n(-e^{1-x}) dx$$

$$u_{n+1} = -1^{n+1}e^{1-1} + 0^{n+1}e^{1-0} + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

$$u_{n+1} = -1 + (n+1)u_n \quad \text{CQFD}$$

b.

def suite ()

u = exp(1) - 2

for n in range (1 , 8)

u = (n+1)*u - 1

return u

3. a. Avec $0 \leq x \leq 1$ on a $-1 \leq -x \leq 0$ et $0 \leq 1-x \leq 1$ Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on a alors $e^0 \leq e^{1-x} \leq e^1 \Leftrightarrow 1 \leq e^{1-x} \leq e$

Alors, par positivité de l'intégrale : $\int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n e dx$

Or

$$\int_0^1 x^n e dx = \left[\frac{ex^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{e \times 1^{n+1}}{n+1} - \frac{e \times 0^{n+1}}{n+1} = \frac{e}{n+1}$$

On a bien $u_n \leq \frac{e}{n+1}$

b. On a $0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$ Avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ Donc, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Sujet 2 : CORRIGÉ

1.

$$I_0 = \int_0^{\pi} e^{-0x} \sin(x) dx = \int_0^{\pi} \sin(x) dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$$

2. a. Pour $x \in [0; \pi]$, on a $\sin x \geq 0$ et comme l'exponentielle est toujours positive, alors $e^{-nx} \sin x \geq 0$
Par positivité de l'intégrale, on en déduit, pour tout entier naturel n : $\int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x) dx \geq 0 \Leftrightarrow I_n \geq 0$.

b.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} e^{-(n+1)x} \sin(x) dx - \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x) dx = \int_0^{\pi} (e^{-(n+1)x} - e^{-nx}) \sin(x) dx$$

$$\text{On a } e^{-(n+1)x} - e^{-nx} = e^{-nx} e^{-1} - e^{-nx} = e^{-nx} (e^{-1} - 1)$$

$$\text{Or, on a } e^{-1} \leq 1 \Rightarrow e^{-1} - 1 \leq 0 \text{ et donc } e^{-nx} (e^{-1} - 1) \leq 0$$

$$\text{Par conséquent, pour } x \in [0; \pi], \text{ on a } (e^{-(n+1)x} - e^{-nx}) \sin(x) \leq 0$$

$$\text{Et par positivité de l'intégrale, } \int_0^{\pi} (e^{-(n+1)x} - e^{-nx}) \sin(x) dx \leq 0 \text{ et donc on a bien } I_{n+1} - I_n \leq 0$$

$$\text{c. } I_{n+1} - I_n \leq 0 \Leftrightarrow I_{n+1} \leq I_n : \text{ la suite } (I_n) \text{ est décroissante}$$

$$\text{Et on avait } I_n \geq 0 : \text{ la suite } (I_n) \text{ est minorée par zéro}$$

D'après le théorèmes des suites monotones bornées, la suite (I_n) converge.

$$\text{3. a. Pour } x \in [0; \pi], \text{ on a } \sin x \leq 1 \Rightarrow e^{-nx} \sin(x) \leq e^{-nx}$$

$$\text{Alors, par positivité de l'intégrale, on a } \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x) dx \leq \int_0^{\pi} e^{-nx} dx \text{ et } I_n \leq \int_0^{\pi} e^{-nx} dx$$

b.

$$\int_0^{\pi} e^{-nx} dx = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n} e^{-n\pi} - \left(-\frac{1}{n} e^{-0} \right) = -\frac{1}{n} e^{-n\pi} + \frac{1}{n} = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$$

$$\text{c. On a } 0 \leq I_n \leq \int_0^{\pi} e^{-nx} dx \text{ donc } 0 \leq I_n \leq \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$$

$$\text{Par inverse de limite, on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n\pi} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{n\pi}} = 0 \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-n\pi} = 1$$

$$\text{Donc par quotient de limites } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-n\pi}}{n} = 0$$

$$\text{D'après le théorème des gendarmes, on a alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

4. a.

On peut faire une intégration par partie avec $u = e^{-nx}$ et $v' = \sin(x)$ et donc $u' = -ne^{-nx}$ et $v = -\cos x$

$$I_n = [-e^{-nx} \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-ne^{-nx})(-\cos(x)) dx = -e^{-n\pi} \cos \pi + e^0 \cos 0 - n \int_0^{\pi} e^{-nx} \cos(x) dx$$

$$I_n = e^{-n\pi} + 1 - nJ_n$$

Ou, on peut faire l'intégration par partie avec $u = \sin(x)$ et $v' = e^{-nx}$ et donc $u' = \cos x$ et $v = -\frac{1}{n} e^{-nx}$

$$I_n = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(-\frac{1}{n} e^{-nx} \right) \cos(x) dx = -\frac{1}{n} e^{-n\pi} \sin \pi + \frac{1}{n} e^0 \sin 0 + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} e^{-nx} \cos(x) dx$$

$$I_n = 0 + 0 + \frac{1}{n} J_n \Rightarrow I_n = \frac{1}{n} J_n$$

$$\text{b. On a } I_n = \frac{1}{n} J_n \Leftrightarrow nI_n = J_n$$

$$\text{Alors } I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n = 1 + e^{-n\pi} - n(nI_n) = 1 + e^{-n\pi} - n^2 I_n$$

$$\Leftrightarrow I_n + n^2 I_n = 1 + e^{-n\pi} \Leftrightarrow I_n(1 + n^2) = 1 + e^{-n\pi} \Leftrightarrow I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}$$

5. $\Rightarrow$ While $l > 0.1$