

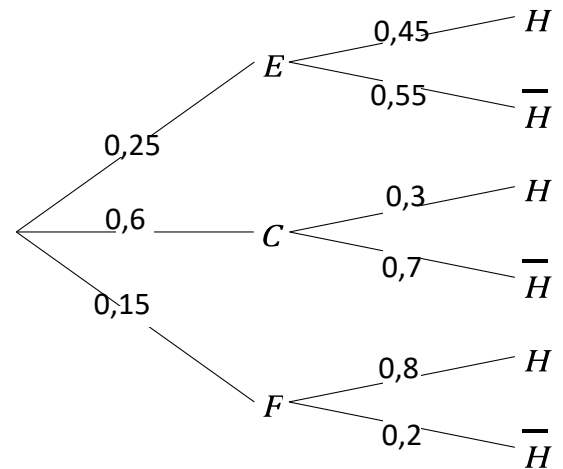
# BAC BLANC du 22 mai 2026

## CORRECTION (Sujet 1 - Amérique du Nord - 2026)

### EXERCICE 1 (5 points)

#### Partie A

- On a  $p(F \cap H) = 0,12 = p(F) \times P_F(H)$   
 $\Rightarrow P_F(H) = \frac{0,12}{0,15} = 0,8$   
 Arbre complété ci-contre.
- $P(E \cap H) = 0,25 \times 0,45 = 0,1125$ .
- On a  $P(H) = P(E \cap H) + P(C \cap H) + P(F \cap H)$   
 $= 0,1125 + 0,18 + 0,12 = 0,4125$  CQFD
- On calcule  $P_H(E) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)} = \frac{0,1125}{0,4125} \simeq 0,273$ .  
 Il y a donc environ 27,3% de chances qu'il ait choisi l'abonnement «Étudiant».



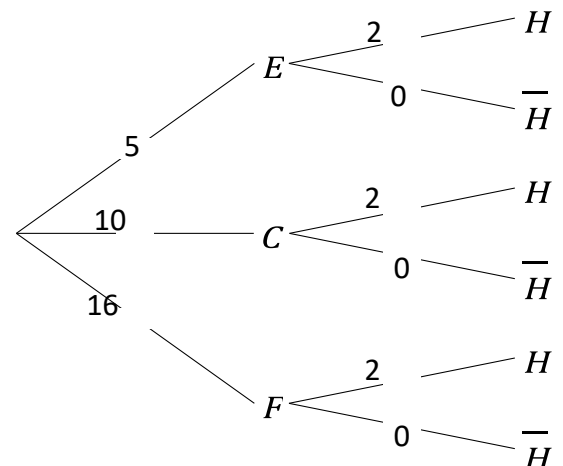
#### Partie B

- On choisit 8 abonnés et à chaque tirage, la probabilité d'obtenir un abonné avec l'option « hors-ligne » est  $P(H) = 0,4125$  donc les paramètres de la loi binomiale sont  $n = 8$  et  $p = 0,4125$ .
- $P(X = 0) = 0,5875^8 \simeq 0,014$ . Il y a donc environ 1,4% de chances qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option « Écoute hors-ligne ».
- a. On a cette fois affaire à une variable aléatoire  $X_n$  qui suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p = 0,4125$ .  
 On a alors  $q_n = P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - 0,5875^n$ .
- b. On résout  $q_n \geq 0,999 \Leftrightarrow 1 - 0,5875^n \geq 0,999 \Leftrightarrow 0,5875^n \leq 0,001$   
 $\Leftrightarrow n \ln 0,5875 \leq \ln 0,001 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,001}{\ln 0,5875} \simeq 12,987$  donc ce sera à partir de  $n = 13$ .

#### Partie C

- En s'aidant de l'arbre, on constate que les valeurs possibles de  $Y$  donc 5 ; 7 ; 10 ; 12 ; 16 et 18.
- On a  $P(E \cap \bar{H}) = 0,1375$  ;  $P(C \cap \bar{H}) = 0,42$   
 et  $P(F \cap \bar{H}) = 0,03$   
 La loi de probabilité de  $Y$  est alors :

| $y$        | 5      | 7      | 10   | 12   | 16   | 18   |
|------------|--------|--------|------|------|------|------|
| $P(Y = y)$ | 0,1375 | 0,1125 | 0,42 | 0,18 | 0,03 | 0,12 |



- On a  $E(Y) = 5 \times 0,1375 + \dots + 18 \times 0,12 = 10,475$   
 CQFD.  
 Cela signifie qu'un abonné paye en moyenne 10,475 € par mois.
- a.  $V(Z) = (\sigma(Z))^2 = 4$ .

b. On veut montrer ici que  $P(6 < Z < 12) \geq 0,5$  c'est-à-dire que  $P(|Z - 9| < 3) \geq 0,5$ .

Or d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P(|Z - 9| \geq 3) \leq \frac{4}{3^2} \Leftrightarrow P(|Z - 9| < 3) > 1 - \frac{4}{9} \geq 0,5$$

Donc effectivement, il y a au moins 50 % de chances pour que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros.

## EXERCICE 2 (5 points)

1.  $f$  semble convexe sur  $]-\infty; 1]$  et concave sur  $[1; +\infty[$ .

2. En  $-\infty$ , on a :  $x^2 + 1 \rightarrow +\infty$  donc  $\ln(x^2 + 1) \rightarrow +\infty$  et  $-3x \rightarrow +\infty$  donc par limite de somme :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

3. a. On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= 5 \ln(x^2 + 1) - 3x \\ &= 5 \ln\left(x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) - 3x \\ &= 5 \left(\ln x^2 + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) - 3x \\ &= 5 \times 2 \ln x + 5 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - 3x = 10 \ln x + 5 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - 3x \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$x \left(\frac{10 \ln x}{x} - 3\right) + 5 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 10 \ln x - 3x + 5 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 10 \ln x + 5 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - 3x$$

On a donc bien :

$$f(x) = x \left(\frac{10 \ln x}{x} - 3\right) + 5 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

b. En  $+\infty$ , on a par croissance comparée :  $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$  donc  $\frac{10 \ln x}{x} - 3 \rightarrow -3$  et  $x \left(\frac{10 \ln x}{x} - 3\right) \rightarrow -\infty$ .

D'autre part  $1 + \frac{1}{x^2} \rightarrow 1$  donc  $5 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \rightarrow 0$

Par limite de somme, on obtient donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

4. a. On a :

$$f'(x) = 5 \frac{2x}{x^2 + 1} - 3 = \frac{10x}{x^2 + 1} - \frac{3x^2 + 3}{x^2 + 1} = \frac{10x - 3x^2 - 3}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1} \quad \text{CQFD}$$

b. On calcule :  $\Delta = 100 - 4 \times 9 = 64$

Le polynôme est concave et possède deux racines :  $x_1 = \frac{-10-8}{-6} = 3$  et  $x_2 = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$ .

On obtient donc :

| $x$               | $-\infty$ | $\frac{1}{3}$ | $3$                      | $+\infty$  |                |            |           |
|-------------------|-----------|---------------|--------------------------|------------|----------------|------------|-----------|
| $-3x^2 + 10x - 3$ | $-$       | $0$           | $+$                      | $0$        | $-$            |            |           |
| $x^2 + 1$         | $+$       | $ $           | $+$                      | $ $        | $+$            |            |           |
| $f'(x)$           | $-$       | $0$           | $+$                      | $0$        | $-$            |            |           |
| $f(x)$            | $+\infty$ | $\searrow$    | $5 \ln \frac{10}{9} - 1$ | $\nearrow$ | $5 \ln 10 - 9$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

5.

a. On a  $-10x^2 + 10 = -10(x^2 - 1)$  dont les racines sont  $-1$  et  $+1$ .

On obtient donc :

| $x$           | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |     |
|---------------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $-10x^2 + 10$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ |
| $(x^2 + 1)^2$ | $+$       | $ $  | $+$ | $ $       | $+$ |
| $f'''(x)$     | $-$       | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ |

$f$  est donc concave sur  $] -\infty; -1]$  contrairement à ce qu'il nous avait semblé.

On doit donc rejeter la conjecture faite à la question 1.

b. En  $x = 1$ , on a  $f(1) = 5 \ln 2 - 3$  et  $f'(1) = \frac{4}{2} = 2$ .

Donc la tangente à  $C_f$  en  $A$  a pour équation :  $y = 2(x - 1) + 5 \ln 2 - 3 \Leftrightarrow y = 2x + 5 \ln 2 - 5$ .

c.  $f$  étant concave sur  $[1; +\infty[$ , sa courbe est en-dessous de sa tangente, ce qui donne :

En déduire que pour tout  $x \geq 1$ ,  $\ln(x^2 + 1) \leq x + \ln(2) - 1 \leq x$ .

$$f(x) \leq 2x + 5 \ln 2 - 5$$

$$\Leftrightarrow 5 \ln(x^2 + 1) - 3x \leq 2x + 5 \ln 2 - 5$$

$$\Leftrightarrow 5 \ln(x^2 + 1) \leq 5x + 5 \ln 2 - 5$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) \leq x + \ln(2) - 1$$

Or  $\ln(2) - 1 < 0$  donc par élargissement,  $\ln(x^2 + 1) \leq x + \ln(2) - 1 \leq x$  CQFD.

**d.** On a :

$$\begin{aligned}\ln(x^2 + 1) &\leq x \\ \Rightarrow 5 \ln(x^2 + 1) &\leq 5x \\ &\Rightarrow f(x) \leq 2x \\ \Rightarrow \int_1^x f(t) dt &\leq \int_1^x 2t \, dt \\ &\Rightarrow g(x) \leq [t^2]_1^x \\ \Rightarrow g(x) &\leq x^2 - 1 \quad \text{CQFD}\end{aligned}$$

### EXERCICE 3 (5 points)

#### Partie A :

1.  $u_1 = 4 - \frac{4}{4} = 3$ . Il y aura 3000 perches-soleil au 1<sup>er</sup> janvier 2026.
2.
  - a. On calcule  $h'(x) = \frac{4}{x^2} > 0$  donc  $h$  est (strictement) croissante sur  $]0; +\infty[$ .
  - b. Démontrons par récurrence la propriété :  $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$ .  
**Initialisation :** Pour  $n = 0$  on a  $u_n = u_0 = 4$  et  $u_{n+1} = u_1 = 3$   
donc effectivement  $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$  pour  $n = 0$ .  
**Hérédité :** Si la propriété est vraie pour  $n = p$ , alors on a  $2 \leq u_{p+1} \leq u_p \leq 4$ .  
Alors, pour  $n = p + 1$  :  
 $u_n = u_{p+1} = f(u_p)$  et  $u_{n+1} = u_{p+2} = f(u_{p+1}) = f(u_{p+1})$   
Et puisque  $h$  est croissante,  
on a  $f(2) \leq f(u_{p+1}) \leq f(u_p) \leq f(4)$   
 $\Rightarrow 2 \leq u_{p+2} \leq u_{p+1} \leq 3 \leq 4$  par élargissement.  
Alors la propriété est vraie pour  $n = p + 1$ .  
**Conclusion :** Pour tout  $n$ , on a donc  $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$ .
  - c.  $(u_n)$  est donc décroissante et minorée par 2. D'après le théorème des suites monotone bornées, elle est donc convergente.
  - d. Puisque  $u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n}$ , on a alors par passage à la limite :  
 $\ell = 4 - \frac{4}{\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 4\ell - 4 \Leftrightarrow \ell^2 - 4\ell + 4 = 0$ . On calcule  $\Delta = 16 - 16 = 0$ .  
Il y a une seule racine :  $\ell = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$  CQFD.  
(autre méthode :  $\ell^2 - 4\ell + 4 = 0 \Leftrightarrow (\ell - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 2$ )
  - e. On voit donc que la population de l'espèce va se stabiliser à long terme autour de 2000 individus : l'espèce ne va donc pas disparaître.
3.
  - a.
  - b. La commande `population(2.2)` donnera l'entier  $n$  à partir duquel on aura  $u_n < 2,2$ .  
On observe à la calculatrice que :  $u_9 = 2,2$  et  $u_{10} < 2,2$  donc la commande renverra le nombre 10.  
C'est à partir de 2035 qu'il y aura moins de 2200 perches dans l'étang.

```
def population(s) :  
    u=4  
    n=0  
    while u>=s :  
        u=4-4/u  
        n=n+1  
    return n
```

#### Partie B

1.  $(E) \quad y' + y = 2 \Leftrightarrow (E) \quad y' = -y + 2$  La solution constante est  $y = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{-1} = 2$   
Les solutions de  $(E)$  sont donc de la forme :  $y(t) = ke^{-t} + 2$  avec  $k \in \mathbb{R}$
2.  $p$  est solution de  $(E)$  donc  $p(t) = ke^{-t} + 2$   
Avec  $p(0) = 4$  on cherche  $k$  tel que  $ke^0 + 2 = 4 \Leftrightarrow k = 4 - 2 = 2$   
Donc on a bien  $p(t) = 2e^{-t} + 2$   
On a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$  donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 2 \times 0 + 2 = 2$   
Selon ce modèle, la population de l'espèce va se stabiliser à long terme autour de 2000 individus : l'espèce ne va donc pas disparaître.

## EXERCICE 4 (5 points)

### Partie A

1. On a :  $A(-1; -1; 0)$  et  $D(1; -1; 0)$ .
2. On a  $\overrightarrow{SC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{SB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  donc  $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} = -1 + 1 + 4 = 4$ .
3. On a  $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} = SC \times SB \cos \widehat{BSC} \Rightarrow \cos \widehat{BSC} = \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB}}{SC \times SB}$   
Or  $SC = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$  et de même  $SB = \sqrt{6}$  donc  $\cos \widehat{BSC} = \frac{4}{\sqrt{6}^2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ .  
Ainsi on obtient  $\widehat{BSC} = \cos^{-1} \left( \frac{2}{3} \right) \simeq 48,2^\circ$ .

### Partie B

1.
  - a. On calcule  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{SB} = 0 - 2 + 2 = 0$  et  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 + 2 - 2 = 0$  donc  $\vec{n} \perp \overrightarrow{SB}$  et  $\vec{n} \perp \overrightarrow{SC}$  donc  $\vec{n}$  est normal au plan  $(SBC)$ .
  - b. Le plan  $(SBC)$  a donc une équation cartésienne de la forme  $0x + 2y + z + d = 0$ .  
Or  $S \in (SBC) \Rightarrow 0 + 2 + d = 0 \Rightarrow d = -2$ .  
Donc  $2y + z - 2 = 0$  est bien une équation cartésienne de  $(SBC)$ .
2.
  - a.  $(OH) \perp (SBC)$  donc  $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $(OH)$  et elle passe par  $O(0; 0; 0)$  donc elle peut effectivement avoir pour représentation paramétrique :
$$(OH): \begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$
  - b.  $H$  est à l'intersection de  $(OH)$  et de  $(SBC)$  donc on résout :
$$2(2t) + t - 2 = 0 \Leftrightarrow 5t = 2 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5} = 0,4.$$
ainsi on a :  $\begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = 0,8 \\ z_H = 0,4 \end{cases} \Rightarrow H(0; 0,8; 0,4) \text{ ou } H\left(0; \frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right).$
  - c. La distance du point  $O$  au plan  $(SBC)$  est la distance  $OH$ .  
Or  $OH = \sqrt{0 + \frac{16}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  cm. CQFD

### Partie C

1.
  - a.  $V_{SABCD} = \frac{1}{3} OS \times (AB \times BC) = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{8}{3}$ .
  - b. Pour des raisons de symétrie, la pyramide  $OCBS$  a un volume 4 fois moindre que  $SABCD$  donc  $V_{OCBS} = \frac{8}{3} \div 4 = \frac{2}{3} \text{ cm}^3$ . CQFD  
(Autre méthode : hauteur = 2 et la base est le triangle rectangle  $OBC$  avec  $OB = OC = \sqrt{2}$   
 $\Rightarrow V_{OCBS} = \frac{1}{3} \times 2 \times \left( \frac{1}{2} \sqrt{2} \times \sqrt{2} \right) = \frac{2}{3}$ )

2.  $SBC$  est un triangle isocèle en  $S$  avec  $BC = 2$  et  $SJ = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ .

Son aire est donc :  $\mathcal{A}_{SBC} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = \sqrt{5}$ .

3. En utilisant le point  $H$  de la partie B,  $(OH)$  est la hauteur de  $OCBS$  relativement à la face  $(SBC)$   
Donc on a aussi :

$$V_{OCBS} = \frac{1}{3} \times OH \times \mathcal{A}_{SBC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times OH \times \sqrt{5} \Rightarrow 2 = OH\sqrt{5} \Rightarrow OH = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ cm} \quad \text{CQFD.}$$