

Sujet n°5 – Amérique du Sud 1 – nov 25

*Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près en cas de besoin.
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.*

Partie A

Au tennis, le joueur qui est au service peut, en cas d'échec lors du premier service, servir une deuxième balle. En match, Abel réussit son premier service dans 70 % des cas. Lorsque le premier service est réussi, il gagne le point dans 80 % des cas.

En revanche, après un échec à son premier service, Abel gagne le point dans 45 % des cas.

Abel est au service.

On considère les événements suivants :

- S : « Abel réussit son premier service »
- G : « Abel gagne le point ».

1. Décrire l'évènement $\bar{S}$ puis traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(S \cap G)$.
3. Justifier que la probabilité de l'évènement G est égale à 0,695.
4. Abel a gagné le point. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi son premier service ?
5. Les événements S et G sont-ils indépendants? Justifier.

Partie B

À la sortie d'une usine de fabrication de balles de tennis, une balle est jugée conforme dans 85 % des cas.

1. On teste successivement 20 balles. On considère que le nombre de balles est suffisamment grand pour assimiler ces tests à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de balles conformes parmi les 20 testées.

- a. Quelle est la loi suivie par X et quels sont ses paramètres? Justifier.
- b. Calculer $P(X \leq 18)$.
- c. Quelle est la probabilité qu'au moins deux balles ne soient pas conformes parmi les 20 balles testées?
- d. Déterminer l'espérance de X .

2. On teste maintenant n balles successivement. On considère les n tests comme un échantillon de n variables aléatoires C indépendantes suivant une loi d'espérance 0,85 et de variance 0,1275.

On considère la variable aléatoire

$$M_n = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{n} = \frac{C_1}{n} + \frac{C_2}{n} + \frac{C_3}{n} + \dots + \frac{C_n}{n}$$

- a. Déterminer l'espérance et la variance de M_n .
- b. Après avoir rappelé l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$P(0,75 < M_n < 0,95) \geq 1 - \frac{12,75}{n}.$$

- c. En déduire un entier n tel que la moyenne du nombre de balles conformes pour un échantillon de taille n appartienne à l'intervalle $]0,75; 0,95[$ avec une probabilité supérieure à 0,9.