

Corrections Savoir Ups. 6

Corrigé Exercice 6

- 1) a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + (-1) \times 4 = 6 - 4 = 2$
 b. On a $\vec{a} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8 - 3 = -11$
 c. $\vec{u}^2 = 3^2 + (-1)^2 = 9 + 1 = 10$
 d. $\|\vec{b}\| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$
- 2) a. On a $\vec{AC} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{AD} \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$
 donc $\vec{AC} \cdot \vec{AD} = 42 - 28 = 14$
 b. On a $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{DC} \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$
 donc $\vec{AB} \cdot \vec{DC} = 2 - 55 = -53$
 c. On a $\vec{CB} \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \end{pmatrix}$ donc $\vec{CB}^2 = (-5)^2 + (-9)^2 = 25 + 81 = 106$
 d. On a $\vec{DC} \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$ donc $DC = \sqrt{1 + 121} = \sqrt{122}$

- 1) a. $3\vec{u} \cdot 5\vec{v} = 15\vec{u} \cdot \vec{v} = 15 \times (-4 - 6) = -150$
 b. $\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = -20 + 6 + 5 - 4 = -13$
 c. $2\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 - 1 \\ 6 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} + 3\vec{w} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix}$
 donc $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + 3\vec{w}) = -99 + 72 = -27$
- 2) a. On a $\vec{MA} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{MT} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$
 donc $\vec{MA} \cdot \vec{MT} = 14 - 20 = -6$
 b. On a $\vec{TH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\|\vec{TH}\| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
 c. On a $\vec{TA} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ donc $\vec{TA}^2 = 25 + 81 = 106$

Corrigé Exercice 7

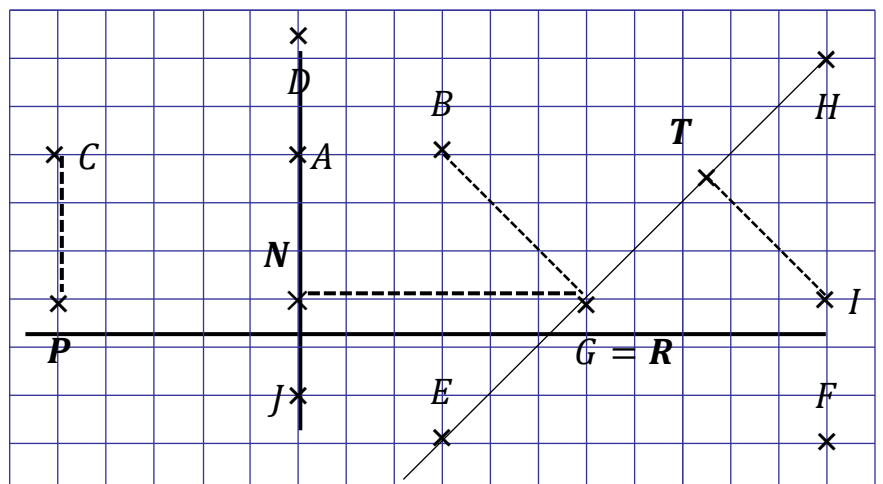
- 1) a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5 + 6 = 1 \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.
 b. $\vec{u} \cdot \vec{w} = -6 + 6 = 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

- a. On a $\vec{b} \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix}$ donc $\vec{a} \cdot \vec{b} = -24 + 24 = 0$
 Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux
 b. On a $\vec{PS} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\vec{a} \cdot \vec{PS} = 8 - 10 = -2 \neq 0$
 Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{PS}$ ne sont pas orthogonaux.

- 2) a. On a $\vec{EF} \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\vec{GH} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ donc $\vec{EF} \cdot \vec{GH} = -60 + 60 = 0 \Rightarrow \vec{EF}$ et $\vec{GH}$ sont orthogonaux
 b. On a $\vec{FG} \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \end{pmatrix}$ et $\vec{HE} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc $\vec{FG} \cdot \vec{HE} = 3 + 52 = 55 \neq 0 \Rightarrow \vec{FG}$ et $\vec{HE}$ ne sont pas orthogonaux

Corrigé Exercice 8

- a. $M = A$
 b. N = projeté de G sur (AJ) voir figure
 c. P = projeté de C sur (GI) voir figure
 d. $Q = E$
 e. $R = G$ voir figure
 f. $S = F$ car $F \in (IH)$
 g. T = projeté de I sur (GH) voir figure



Corrigé Exercice 9

1) a. Soit d la longueur de la diagonale du carré de côté 1, on a : $d^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow d = \sqrt{2}$

b. Alignés de sens opposés : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \times 5 = -15$

Alignés et de même sens : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 5 \times 8 = 40$

Le projeté sur (AB) de D est A , donc : $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 3^2 = 9$

Les vecteurs sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$

(ou le projeté sur (BE) de A est B , donc : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BB} \cdot \overrightarrow{BE} = \vec{0} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$)

$$\overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$$

$$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{HI} = 6 \times 5 = 30$$

$$\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{HI} = 0$$

$$\overrightarrow{JE} \cdot \overrightarrow{FJ} = -3 \times 8 = -24$$

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{JE} = 0$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EF} = -5 \times 8 = -40$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IF} = 0$$

$$\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GH} = -3\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = -15 \times 2 = -30$$

2) a. • C • H • I • C • H

$$b. BC^2 = AB^2 - AC^2 = 169^2 - 156^2 = 4225 \Rightarrow BC = \sqrt{4225} = 65$$

$$CH^2 = BC^2 - BH^2 = 3600 \Rightarrow CH = 60 \text{ et simplement } AH = AB - BH = 144$$

$$c. \bullet \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad \bullet \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AB} = -BH \times AB = -4225 \quad \bullet \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 ;$$

$$\bullet I \text{ est le milieu de } [AC] \text{ donc } AI = IC = \frac{156}{2} = 78 \text{ donc } \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{AI} = IC \times AI = 78^2 = 6084$$

$$\bullet \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB} = AH \times HB = 144 \times 25 = 3600 \quad \bullet \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0$$

$$\bullet \text{Le projeté de } B \text{ sur } (CH) \text{ est } H \text{ donc } \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CH}^2 = 60^2 = 3600$$

$$\bullet \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AB} = -25 \times 169 = -4225 \quad (\text{ou } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CB} = -65^2 = -4225 \text{ aussi})$$

Corrigé Exercice 10

$$1) a. \vec{u} \cdot \vec{v} = -2 + 3k \quad \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux si } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow -2 + 3k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$$

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux pour } k = \frac{2}{3}$$

$$b. \vec{u} \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} k \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = k^2 - 4 \quad \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux si } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow k^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow k = 2 \text{ ou } k = -2 \Rightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux pour } k \in \{-2; 2\}$$

$$c. \vec{u} \begin{pmatrix} 2k \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} -k \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = -2k^2 - 3 \quad \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux si } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow -2k^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$k^2 = -\frac{3}{2} \text{ ce qui est impossible, car un carré est toujours positif...}$$

donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne peuvent jamais être orthogonaux

$$2) \vec{u} \cdot \vec{v} = ab - ab = 0 \Rightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont toujours orthogonaux}$$

Corrigé Exercice 11

$$1) a. (\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 3^2 + 2 \times 5 + 2^2 = 23$$

$$b. (\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 9 - 10 + 4 = 3$$

$$c. (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 9 - 4 = 5$$

$$2) a. (3\vec{u} - 2\vec{v})^2 = 9\|\vec{u}\|^2 - 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 4\|\vec{v}\|^2 = 9 + 36 + 4 \times 2 = 53$$

$$b. (4\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) = 4\|\vec{u}\|^2 + 8\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\vec{v} \cdot \vec{u} - 6\|\vec{v}\|^2 = 4 + 5 \times (-3) - 6 \times 2 = -23$$

$$3) (2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 2\vec{v}) = -2\vec{u}^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + 2\vec{v}^2 = -4 - 8 + 2 + 10 = 0$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien orthogonaux