

1. Intégrale d'une suite de fonctions $u_n = \int_a^b f_n(x) dx$

Propriété des intégrales

- $u_{n+1} + u_n = \int_a^b (f_{n+1}(t) + f_n(t)) dt$
- $u_{n+1} - u_n = \int_a^b (f_{n+1}(t) - f_n(t)) dt$
 - Si $f_{n+1}(t) - f_n(t) \geq 0$ alors par positivité de l'intégrale $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et (u_n) est **croissante**
 - Si $f_{n+1}(t) - f_n(t) \leq 0$ alors par positivité de l'intégrale $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et (u_n) est **décroissante**
- Si $g(t) \leq f_n(t) \leq f(t)$ alors, par positivité de l'intégrale $\int_a^b g(t) dt \leq u_n \leq \int_a^b f(t) dt$
Cas particulier : $m \leq f_n(t) \leq M \Rightarrow \int_a^b m dt \leq \int_a^b f_n(t) dt \leq \int_a^b M dt \Rightarrow m(b-a) \leq u_n \leq M(b-a)$

Propriété des suites

- Si (u_n) est **croissante** et $u_n \leq M$ alors, d'après le **théorème des suites monotones bornées**, (u_n) est **convergente**
- Si (u_n) est **décroissante** et $u_n \geq m$ alors, d'après le **théorème des suites monotones bornées**, (u_n) est **convergente**
- Si $a_n \leq u_n \leq b_n$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lambda$ alors, d'après le **théorème des gendarmes**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lambda$

2. Suite d'intégrale d'une suite de fonctions $I_n = \int_a^n f(x) dx$

Propriété des intégrales

- $I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} f(t) dt$
 - Si $f(t) \geq 0$ sur $[n; n+1]$ alors, par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n \geq 0$ et (I_n) est **croissante**
 - Si $f(t) \leq 0$ sur $[n; n+1]$ alors par positivité, $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et (I_n) est **décroissante**
- Si $g(t) \leq f(t) \leq h(t)$ alors, par positivité de l'intégrale $\int_a^n g(t) dt \leq I_n \leq \int_a^n h(t) dt$
Cas particulier : $m \leq f(t) \leq M \Rightarrow \int_a^n m dt \leq \int_a^n f(t) dt \leq \int_a^n M dt \Rightarrow m(n-a) \leq u_n \leq M(n-a)$