

Corrigé Sujet n°2 – Amérique du Nord 2 – juin 25

Partie A

1. Il y a 15 lancers, donc $n = 15$ et ils sont chacun réussi avec une probabilité de 0,32, donc $p = 0,32$
 $N \hookrightarrow \mathcal{B}(15; 0,32)$

2. $p(N = 4) = \binom{15}{4} \times 0,32^4 \times (1 - 0,32)^{15-4} = 1365 \times 0,32^4 \times 0,68^{11} \simeq 0,206$

Il y a environ 20,6% de chances que Victor réussisse exactement 4 paniers.

3. $p(N \leq 6) \simeq 0,828$ Il y a environ 82,8 % de chances que Victor réussisse au plus 6 paniers.

4. $E(N) = np = 15 \times 0,32 = 4,8$

5. a. $T = 3N$ puisqu'il s'agit de paniers à 3 points

b. $E(T) = E(3N) = 3E(N) = 3 \times 4,8 = 14,4$

Sur une série de 15 lancers, Victor peut espérer, en moyenne, gagner 14,4 points

c. L'évènement $(12 \leq T \leq 18)$ correspond à l'évènement $(4 \leq N \leq 6)$

$$P(12 \leq T \leq 18) = P(4 \leq N \leq 6) = p(N \leq 6) - p(N \leq 3) \simeq 0,586$$

Il y a environ 58,6 % de chances que Victor marque entre 12 et 18 points

Partie B

1. a. La variable aléatoire M_{50} donne le nombre moyen de points gagné par match, sur les 50 matchs joués.

b. $E(M_{50}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{50}}{50}\right) = \frac{1}{50} (E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{50})) = \frac{1}{50} \times (50 \times E(X)) = E(X) = 22$

Les variables $X_1, X_2, \dots, X_{50}$ sont indépendantes, donc :

$$V(M_{50}) = V\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{50}}{50}\right) = \frac{1}{50^2} \times (50 \times V(X)) = \frac{1}{50} V(X) = \frac{65}{50}$$

c. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev $P(|M_{50} - E(M_{50})| \geq \delta) \leq \frac{V(M_{50})}{\delta^2}$ pour $\delta = 3$:

$$P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{\frac{65}{50}}{9} \quad \text{Avec } \frac{\frac{65}{50}}{9} = \frac{65}{450} = \frac{13}{90} \quad \text{on a bien l'inégalité recherchée}$$

d. On a $22 - 19 = 3$ et $25 - 22 = 3$: l'évènement $(19 < M_{50} < 25)$ correspond à $(|M_{50} - 22| < 3)$

$$\text{On a alors : } p(19 < M_{50} < 25) = p(|M_{50} - 22| < 3) = 1 - p(|M_{50} - 22| \geq 3)$$

On sait, de la question précédente, que :

$$P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90} \Leftrightarrow 1 - P(|M_{50} - 22| \geq 3) \geq 1 - \frac{13}{90} \Leftrightarrow 1 - P(|M_{50} - 22| \geq 3) \geq \frac{77}{90}$$

Comme $\frac{77}{90} \simeq 0,856$ et donc $\frac{77}{90} > 0,85$ on a bien :

$$p(19 < M_{50} < 25) > 0,85$$

2. $P(|M_n - E(M_n)| \geq 3) \leq \frac{V(M_n)}{9}$ comme $E(M_n) = E(X) = 22$ et $V(M_n) = \frac{1}{n} V(X) = \frac{65}{n}$

$$\text{On a } P(|M_n - 22| \geq 3) \leq \frac{65}{9n}$$

$$\text{Pour que } P(|M_n - 22| \geq 3) \leq 0,01 \text{ on cherche } n \text{ tel que } \frac{65}{9n} \leq 0,01 \Leftrightarrow n \geq \frac{65}{0,09} \Leftrightarrow n \geq 722$$

L'affirmation est fausse : à partir de $n = 722$, l'inégalité serait vraie.