

Exercice 6: Calcul d'intégrales

1) Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = (6x^2 - 2x + 3)e^{x^2}$

On admet que la fonction $G(x) = (3x - 1)e^{x^2}$ est une primitive de g . Calculer $\int_0^1 g(t)dt$

2) Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2(x^2-1)}{x}$

a. Montrer que la fonction $F(x) = x^2 - 2 \ln(x)$ est une primitive de f

b. Calculer $\int_1^e f(t)dt$

Exercice 7 : Calcul d'intégrales

1) Calculer les intégrales suivantes (calcul de primitive et valeurs exacte ! même si à la fin vous pouvez vérifier à la calculatrice...)

$$\mathcal{A} = \int_1^2 \left(2 - \frac{4}{x}\right) dx$$

$$\mathcal{B} = \int_0^1 (2t^2 - 1) dt$$

$$\mathcal{C} = \int_0^4 4e^{1-\frac{x}{2}} du$$

$$\mathcal{D} = \int_0^3 e^{3\lambda} d\lambda$$

$$\mathcal{E} = \int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} dx$$

2) En remarquant que, pour $x > 1$, $\frac{1}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$, calculer l'intégrale $I = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$

Exercice 8 : Alors ?

Pour tout réel a positif, montrer que :

$$\int_0^a \left(3 - \frac{3}{1 + e^{-2x}}\right) dx = \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2}{1 + e^{-2a}}\right)$$

Exercice 9 : Calcul de fonctions définies par intégrales

1) Déterminer une expression littérale des fonctions $F_k(x)$

$$F_1(x) = \int_1^x (1 - e^{2\lambda}) d\lambda$$

$$F_2(x) = \int_e^x \frac{2}{t} dt$$

$$F_3(x) = \int_x^1 (2a - 3) da$$

2) On définit sur $[0; +\infty[$ la fonction G par $G(T) = \int_0^T \frac{(1-x)}{x+3} dx$.

a. Trouver deux réels a et b tels que, pour tout réel $x \geq 0$, on ait $\frac{1-x}{x+3} = a + \frac{b}{x+3}$

b. En déduire une expression de $G(T)$

c. Calculer $\int_0^1 \frac{(1-x)}{x+3} dx$