

Entraînement bac - Suites et inégalités

Exercice n°1 - (Ancien bac S)

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x}$

Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

On donne ci-dessous la courbe C_f représentative de la fonction f dans un repère du plan.
La droite Δ d'équation $y = x$ a aussi été tracée.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

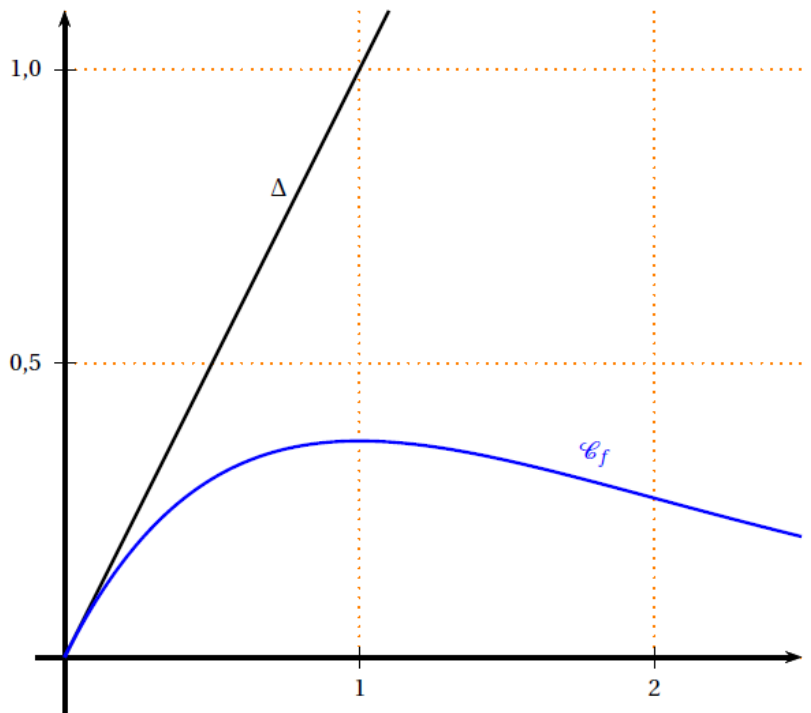
1. Placer sur le graphique donné ci-contre, en utilisant la courbe C_f et la droite Δ , les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 .
Laisser les tracés explicatifs apparents.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $xe^{-x} = x$.
Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.



Partie C

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

Compléter l'algorithme donné ci-contre afin qu'il calcule S_{100} .

```
u = ...
S = ...
for k in range(...) :
    u = u*exp(-u)
    S = ...
print(...)
```

Exercice n°2 - (Métropole - juin 2021 - 2)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}$$

1. La copie d'écran ci-contre présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite (u_n) pour n variant de 0 à 12, ainsi que celles du quotient $\frac{4}{u_n}$, (avec, pour les valeurs de u_n , affichage de deux chiffres pour les parties décimales).
À l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de $\frac{4}{u_n}$ en fonction de n .

Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture (question 5.), et d'en déduire la limite de la suite (u_n) (question 6.).

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 0$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. Que peut-on conclure des questions 2. et 3. concernant la suite (u_n) ?

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{4}{u_n}$

Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.

Préciser sa raison et son premier terme.

En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .

6. Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de u_n en fonction de n .
En déduire la limite de la suite (u_n)

n	u_n	$\frac{4}{u_n}$
0	1,00	4
1	0,80	5
2	0,67	6
3	0,57	7
4	0,50	8
5	0,44	9
6	0,40	10
7	0,36	11
8	0,33	12
9	0,31	13
10	0,29	14
11	0,27	15
12	0,25	16

Exercice n°3 - (Métropole - sept 2021 - 2)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 16$; $v_0 = 5$; et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et v_1 .

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.

a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,1.

En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de w_n en fonction de n .

b. Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = -0,4w_n$.

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante.

On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n , $v_n \geq v_0 = 5$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 5$.

En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de (u_n) .

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente.

On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n) .

4. a. Démontrer que $\ell = \ell'$.

b. On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.

Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n , on a : $c_{n+1} = c_n$.

En déduire que, pour tout entier naturel n , $c_n = 100$.

c. Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ' .

Exercice n°4 - (Ancien bac S)

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues.

Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0,3 \\ u_{n+1} = 0,9u_n(1 - u_n) \end{cases}$$
 où pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année 2000 + n .

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
2. On admet que, pour tout entier naturel n , u_n et $1 - u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0; 1]$.
 - a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq 0,9u_n$
 - b. Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$
 - c. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?

3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.

On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.

Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

```
u = 0.3
n = 0

while ... :

    print(...)
```

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues.

Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues.

L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_{10} = 0,032 \\ v_{n+1} = 1,06v_n(1 - v_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel $n \geq 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année 2000 + n .

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.
2. On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite. Montrer que ℓ vérifie : $\ell = 1,06\ell(1 - \ell)$.
3. La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction?