

Exercice 14 : Convergente ou pas ?

Dans chaque cas, peut-on savoir à l'aide des informations données, si la suite est convergente :

- | | | |
|--|--|--|
| a) (u_n) est décroissante,
et on a pour tout $n : u_n \geq 3$ | b) (u_n) est majorée par 0,
et on a pour tout $n : u_{n+1} \geq u_n$ | c) (u_n) est croissante,
et on a pour tout $n : u_n \geq 4$ |
| d) (u_n) est majorée par e ,
et on a pour tout $n : u_n \leq u_{n+1}$ | e) (u_n) est croissante,
et on a pour tout $n : u_n \leq -2$ | f) (u_n) est croissante,
et on a pour tout $n : u_n \geq -1$ |
| g) (u_n) est minorée par $\sqrt{3}$,
et on a pour tout $n : u_n \geq u_{n+1}$ | h) (u_n) est majorée par 1 200,
et on a pour tout $n : u_{n+1} \leq u_n$ | |

Exercice 15 : Suites monotones bornées

- 1) On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 2015$ et $v_{n+1} = \sqrt{v_n}$.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_{n+1} \leq v_n$.
 - b. Que peut-on en déduire pour la suite (v_n) ?
- 2) Soit la suite (w_n) définie par $w_0 = 5$ et $w_{n+1} = 2 - e^{-w_n}$.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $w_n \geq 0$.
 - b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $w_{n+1} \leq w_n$.
 - c. Qu'en déduit-on pour la suite (w_n) ?
- 3) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$.
 - a. Avec la calculatrice, conjecturer du sens de variation de la suite (u_n) .
 - b. Montrer par récurrence que, pour tout entier n , $u_n \leq 4$.
 - c. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
 - d. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Pour aller plus loin...

- 4) On considère la suite (a_n) définie par :
 $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n+1}$.
 - a. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{3x}{x+1}$ est croissante.
 - b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a :
 $0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq 2$.
 - c. Conclure sur la convergence de (a_n) .

Exercice 16 : Détermination de limite

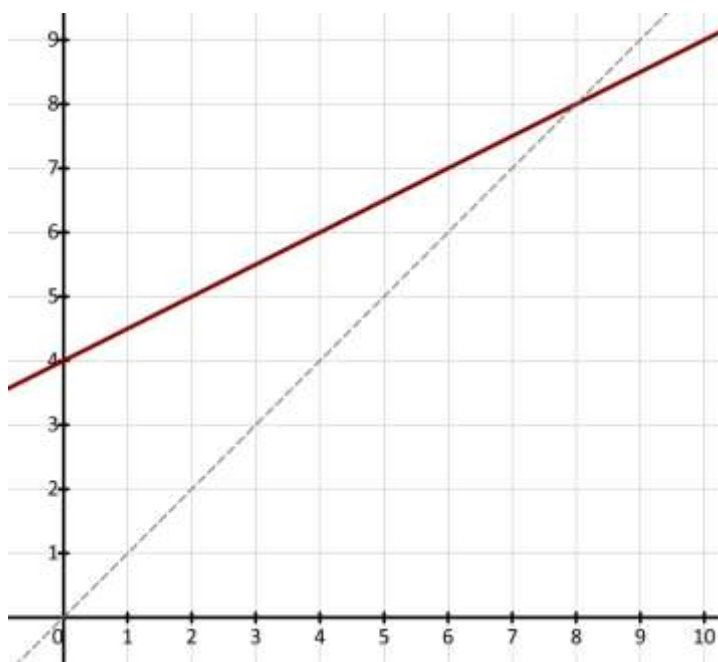
1) On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{10}(u_n + 1)^2$$

- Montrer que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- En déduire que la suite (u_n) est convergente vers un réel l .
- Justifier que $0 \leq l \leq 5$.
- On admet que $l = \frac{1}{10}(l + 1)^2$. Déterminer cette limite.

2) Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 4$.

- Dans le repère ci-dessous sont représentées les droites d'équations $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 4$. Sans calcul, placer les 5 premiers termes de la suite (v_n) sur l'axe des abscisses.
- Conjecturer le sens de variation de (v_n) , ainsi que deux nombres m et M tels que :
 $m \leq v_n \leq M$.
- Démontrer vos conjectures.
- En déduire que la suite (v_n) est convergente vers un réel l vérifiant $l = \frac{1}{2}l + 4$.
- Déterminer la limite de (v_n) .



Pour aller plus loin...

3) Lors de la construction d'un barrage, on a créé un lac artificiel contenant initialement 80 000 m³ d'eau.

Chaque année, on prélève 30 % du volume de ce lac pour produire de l'électricité.

Ce lac est par ailleurs alimenté par une rivière qui lui apporte 6 000 m³ d'eau par an.

Décrire l'évolution à long terme du volume d'eau contenu dans ce lac. Justifier.

Exercice 17 : Petit exo pour réfléchir

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 12$ et $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$.

On souhaite étudier cette suite de deux façons différentes.

A – Première méthode

- Démontrer par récurrence que :
 - Pour tout entier naturel n , $u_n \geq 8$.
 - Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq u_n$.
- En déduire que (u_n) converge vers une limite l .
- Montrer qu'on doit avoir $l = \frac{3}{4}l + 2$.
 - Déterminer la limite de (u_n) .

B – Deuxième méthode

- À la calculatrice, conjecturer la limite l de (u_n) .
- On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - l$ où l est la limite conjecturée à la question 1.
 - Démontrer que (v_n) est géométrique.
 - Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .
 - En déduire la limite de (u_n) .