

SUJET de BAC BLANC

SPECIALITE MATHEMATIQUES

Épreuve du 25 avril 2022

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 6 pages

**Le sujet est composé de 4 exercices indépendants
Le candidat ne doit traiter que 3 exercices
parmi les 4 proposés**

Chaque exercice est noté sur 7 points
Le total de 21 points sera ramené à une note sur 20 par une règle de trois

L'utilisation d'une calculatrice à mode examen est autorisée
Celle-ci ne devra être passée en mode examen qu'au moment signalé expressément par le surveillant

**L'usage de toute autre calculatrice
ou du téléphone portable est interdit quelle qu'en soit la raison**
Aucun échange de calculatrice n'est permis entre les candidats, ni d'aucun document ou brouillon.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

7 points

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4} \\ u_0 = 5 \end{cases}$$

Partie A

1. Déterminer les valeurs exactes de u_1 et de u_2 .
2. Au regard des valeurs tabulées dans le tableau ci-contre, conjecturer le sens de variation et l'éventuelle limite de la suite (u_n) .
Il s'agit dans la suite de cet exercice de démontrer ces conjectures.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1$.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(u_n + 2)}{u_n + 4}$$

4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
5. Justifier que la suite (u_n) converge.

n	u_n
0	5
4	1,04453723
8	1,0011239
12	1,00002876
16	1,00000074
20	1,00000002

Partie B

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

1. a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$. On précisera son premier terme v_0 .
b. Exprimer v_n en fonction de n et donner sa limite.
c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n \neq 1$.
2. On admet que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n}$$

En déduire la limite de la suite (u_n) .

Partie C

On considère l'algorithme en langage Python ci-contre.

1. Lorsqu'on appelle la fonction **recherche()**, quelle valeur cette fonction renvoie-t-elle ?
2. Interpréter cette valeur relativement à la suite (u_n) étudiée dans cet exercice.

```
def recherche() :  
    u = 5  
    n = 0  
    while u >= 1.01 :  
        n = n + 1  
        u = 3 - 10/(u+4)  
    return n
```

Exercice 2

7 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.

Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

1. Vérifier que le point $A(2 ; 3 ; 0)$ appartient à la droite d_1 .
2. Donner un vecteur directeur $\vec{u}_1$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\vec{u}_2$ de la droite d_2 .
Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?
3. Vérifier que le vecteur $\vec{v}(1 ; -2 ; -3)$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
4. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A , et dirigé par les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{v}$.
On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan.
 - a. Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $5x + 4y - z - 22 = 0$.
 - b. Montrer que la droite d_2 coupe le plan $\mathcal{P}$ au point $B(3 ; 3 ; 5)$.
5. On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v}(1 ; -2 ; -3)$, et passant par le point $B(3 ; 3 ; 5)$.
 - a. Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ .
 - b. Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.
 - c. Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.
6. On considère le point $C(4 ; 1 ; 2)$.
 - a. Ce point appartient-il aux droites d_1 et Δ ?
 - b. Calculer la longueur BC , appelée distance entre les droites d_1 et d_2 .

Exercice 3

7 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. a. Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.
b. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .

3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.
4. Soit m un nombre réel. Préciser, selon les valeurs du nombre réel m en distinguant les différents cas de figure, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
5. On note A un point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a .
 - a. Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $x = a$.
 - b. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
On place le point A de manière à ce que la tangente T_a à la courbe $\mathcal{C}_f$ soit parallèle à la droite Δ .
Quelle est alors la valeur de la dérivée f' en $x = a$? Justifier.
 - c. En déduire qu'alors : $(a-1)e^a + a^2 = 0$.

On note g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = (x-1)e^x + x^2$.

On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

- d. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0 ; +\infty[$.
- e. Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite Δ .

Exercice 4

7 points

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

- la formation avec conduite accompagnée
- la formation traditionnelle.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire.

Dans ce groupe :

- 75 personnes ont suivi une formation avec conduite accompagnée ; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.
- 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation traditionnelle ; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.

On considère les évènements suivants :

- A : « la personne a suivi une formation avec conduite accompagnée » ;
- R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation » ;
- R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation »
- R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

Les probabilités demandées seront données sous forme d'une fraction irréductible.

1. Modéliser la situation par un arbre de probabilité.
2.
 - a. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec conduite accompagnée et réussi l'examen à sa deuxième présentation.
 - b. Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $\frac{1}{3}$.
 - c. La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec conduite accompagnée ?
3. On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite. Ainsi, $X = 1$ correspond à l'évènement R_1 .
 - a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
 - b. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe.

On admet que la probabilité de l'évènement R_3 est égale à $\frac{1}{6}$.

 - a. On se place ici dans le cas où $n = 10$. On constitue donc un groupe de 10 personnes. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de personnes qui ne réussissent l'examen qu'à la 3^e présentation.
 - (i) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ?
 - (ii) Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement une personne qui ne réussissent l'examen qu'à la 3^e présentation ? Arrondir au pourcent près.

b. On se place ici dans le cas général où un groupe de n personnes sont choisies, n quelconque.

Dans ce contexte, préciser un évènement dont la probabilité est égale à $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

On considère la fonction Python `seuil` ci-contre, où p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$.

c. Quelle est la valeur renvoyée par la commande `seuil(0.9)` ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(p) :  
    n = 1  
    while 1-(5/6)**n<=p :  
        n = n+1  
    return n
```